分类号 VDC________　　　　　　　　　　密级________

博士学位论文

Lévy-型随机微分方程与随机泛函微分方程解的研究

The study of solution for Lévy-type stochastic differential equations and stochastic functional differential equation

作 者 姓 名：　尹湘锋

学 科 专 业：　概率论与数理统计

学院（系、所）：数学学院

指 导 教 师：　刘再明教授

论文答辩日期 2011 年 11 月 30 日　　　答辩委员会主席________

中　南　大　学

2011 年 11 月



原创性声明

本人声明，所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了论文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中南大学或其他单位的学位或证书而使用过的材料。与我共同工作的同志对本研究所作的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：尹湘锋　日期：2010年11月30日

学位论文版权使用授权书

本人了解中南大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文并根据国家或湖南省有关部门规定送交学位论文，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以采用复印、缩印或其它手段保存学位论文。同时授权中国科学技术信息研究所将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》，并通过网络向社会公众提供信息服务。

作者签名：尹湘锋　导师签名：　日期：2010年11月30日

摘 要

本文主要对 Lévy 过程驱动的随机微分方程和随机时滞微分方程在 p 次 M 型空间中的解的存在唯一性这一基础理论进行研究。同时对 Lévy 过程驱动的随机时滞微分方程在控制理论中的应用做了简单的研究，也即研究了系统的渐近可控性。

全文分为七章。

第一章为绪论。简单阐述了随机系统的理论与应用意义，对随机微分方程的相关研究做了综述。其中重点介绍了 Brownian 运动驱动的各种随机微分方程的主要结果和相关方法。同时对一般 Lévy 过程驱动的各种随机微分方程已有的一些结果进行了简单分析。介绍了本学位论文的研究意义与创新。

第二章为 Lévy 过程的预备知识，主要介绍了 Lévy 过程的定义、可分性以及 Lévy 过程的特征和 Lévy 过程的 Lévy-Itô 分解、Itô 公式等基础理论与常用的结论。

第三章为随机微分方程的预备知识，主要介绍随机微分方程的基本理论，包括 Brownian 运动驱动的 随机常微分方程和随机偏微分方程以及随机时滞微分方程的基本理论和相应的一些结论。对于 Lévy 型随机微分方程，主要介绍了一些已有的 Lévy 型随机微分方程的基础理论。

第四章主要讨论了 Lévy 过程驱动的随机微分方程解的存在唯一

性。当驱动随机微分方程的 Lévy 过程的跳的跳率不为常数，而是一个与系统相关的函数时，方程在一个可分Banach空间即2次M型空间中，系数在一定条件下解的存在性和唯一性。

第五章，主要利用抽象空间中的算子半群方法，考虑随机偏微分方程的适度解。使用算子的分数幂的方法，研究了 Poisson 随机测度驱动下的随机时滞偏微分方程在M型p次空间中解的存在和唯一性，其中 $p=1$或者$p=2$。

第六章，主要研究了$p(1<p<2)$次M型 Banach 空间中 Poison 随机测度驱动的带有限时滞 随机时滞偏微分方程鞅解的存在唯一性和正则性。

第七章，利用 Gaans 的 Lévy 过程的级数理论所得到的结论，对随机时滞微分控制系统的渐近可控性进行了研究。

关键词： Lévy 过程；Poisson 随机测度；随机微分方程；时滞；鞅解；适度解；渐近可控性

ABSTRACT

This paper mainly discusses the basic theory of stochastic differential equations and stochastic differential equations with delay driven by Lévy process in M type p Banach space. The existence and uniqueness of solutions for stochastic differential equations and stochastic function differential equations are obtained, respectively. Then the applications of stochastic system with delay in control theory are investigated. We consider the approximate controllability for semi-linear retarded stochastic systems with Hilbert space valued Lévy noise.

It is divided into seven chapters.

Chapter I is the introduction. In this chapter, we introduce the theory and the applications of stochastic systems briefly, and give a review of research for stochastic differential equation. In the review, we mainly present the results and the methods which used on the stochastic differential equations driven by Brownian motion. Moreover, we present some results of variety of stochastic differential equations driven by Lévy process. Next, we introduce the research significance and the innovation in the paper.

The second chapter is the preliminaries of Lévy process. In this chapter, the basic theories and commonly conclusions are mainly presented

, suchas the definition of Lévy process, the divisibility of Lévy process, Lévy-Itô decomposition and Itô formula.

Chapter III is the preliminaries of stochastic differential equations. In this chapter, the elementary theories of stochastic differential equation are introduced, including stochastic ordinary differential equation and stochastic partial differential equation driven by Brownian motion. Also, we introduce the basic theories of stochastic delay differential equations. For the stochastic delay differential equations driven by Lévy process, we just introduce some basic results which presented in some literatures.

The fourth chapter focuses on the existence and uniqueness of the solutions for stochastic differential equations driven by Lévy process. In this chapter, we consider the case that the jumps of the Lévy process are not constant and depend on the solution of the stochastic system. The main results are obtained in the separability M type 2 Banach space when the coefficient of the stochastic differential equations satisfy certain conditions.

In the fifth chapter, the stochastic partial differential equations are studied. We consider the existence and uniqueness of mild solutions to stochastic partial functional differential equations with finite delay and driven by Poisson random measure, the coefficients of the equation are locally Lipschtiz. Let $A:E\longrightarrow E$ be a generator of an analytic semigroup on E and $A^{\alpha},\alpha>0$ be fractional powers of A, where

Banach space E is M type p and p is 1 or 2.

Chapter VI, the existence and uniqueness of mild solutions to stochastic partial differential equations with delay driven by Poisson random measure are investigated. The equation is the follow,

$$du(t) = [-Au(t) + f(u_{t-})]dt + \int_{\Lambda} g(z, u_{t-})\tilde{N}(dz, dt),$$

where $A: E \to E$ is the generator of an analytic semigroup on E, E being a M type $p(1 < p < 2)$ Banach spaces. $f: X \to V_{-\delta_f}$ and $g: X \to L(Z, V_{-\delta_g})$ satisfy Lipschitz condition, where $X = C([-h,0]; E)$.

In the seventh chapter, the results of the paper[1] are generalized. We investigate the approximate controllability for semi-linear retarded stochastic systems with Hilbert space valued Lévy noise. Sufficient conditions for approximate controllability results are established for this stochastic systems. An example is also provided to illustrate the theory.

KEY WORDS: Lévy process; stochastic partial functional differential equations; M type p, Poisson random measure; Martingale solution; delay; Mild solution; approximate controllability

目 录

第一章　绪论

1.1 研究背景

描述自然界的运动、实际工程技术和社会经济领域中许多问题的动态规律时，一般有确定性的系统和随机系统两种。 而随机系统与确定性系统又有着紧密的联系。简单而言，随机系统就是考虑确定性系统时加入了实际中存在的一些随机干扰。由于干扰的复杂性，实际中的随机系统比确定性系统要复杂很多，当然 其理论和仿真研究因而也就比确 定性系统的理论和仿真研究要迟到了很多。随机系统中的随机干扰是指系统在运行的过程中受到各种随机因素的干扰 或对系统输入输出进行量测时存在着的随机误差。这类例子在系统控制、生态学以及经济学领域中比比皆是，如空间飞行器的动态特性是依赖空气中动力参数，而这些参数既会随着飞行高度、飞行速度及大气中的随机因素变化而变化， 也会随着飞行器燃料的逐渐消耗而改变。从上面的例子可以看出，从某种程度上说，真正能用确定性系统描述的理想过程 是不存在的。也就是说确定性系统刻画的是经过简化的运动规律而并非实际规律。当然随机系统也并非实际运动规律的完全刻画，但是它相对与确定性系统而言要离实际近一些。

我们知道，为了研究的方便，可以将确定性系统分为常微分系统和偏微分系统。对于随机系统，与确定性系统一样也可以分为 随机常微分系统和随机偏微分系统。由于随机系统中存在着随机干扰，那么当考虑随机干扰的情况时候，随机干扰不同随机系统 也是大不一样的，这些我们可以由随机过程理论的复杂性可以得知。随着随机过程以及随机分析理论的发展，人们对于随机过程 也即是随机干扰有了更深入的了解，这样就使得我们在研究随机系统时可以考虑越来越复杂的随机干扰，从而使得研究的随机系统 越来越接近实际情况。

对于下面给出的经典 Itô-型随机常微分方程(即 Brownian 运动驱动的随机常微分方程)

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = x \end{cases} \tag{1.1.1}$$

已有相当多的专著对形如方程(1.1.1)解的存在唯一性以及解的稳定性等相关理论进行了详细的介绍，如龚光鲁[2]、毛学荣[3-6]、A.费里得曼[7]、B.Oksendal[8]等，当然我们还可以参看如下的文献[9-13]。 对于经典的 Itô-型随机常微分方程的研究，除了上面提到的相关理论以外，同时还有很多学者对方程(1.1.1)的解 (强解和弱解)的密度函数关于 Lebesgre 测度的绝对连续性、解的不变测度的存在性和随机流的研究，如：D.Nulart 在[14]中利用典则 Wiener 空间中的 Malliavin 分析方法对 Itô-型随机微分方程解的不变测度和解的密度函数光滑性进行了研究；H.Kutita 对 Itô 随机微分方程和由此得到的随机流进行了研究[15]，其他的我们同样 可以参看文献以及这些文献后面的参考文献[16,17]。对于 Itô-型随机微分方程，非适应分析也是其中一个非常重要的研究方向，在非适应分析方面，利用 Malliavin 分析来研究非适应 Itô-型随机微分方程也已经有了许多文献进行了研究，我们可以参看文献[14,18-20]等。

对 Itô-型随机偏微分方程的研究，也有了很多结果，包括解的存在唯一性的理论研究以及随机偏微分方程在经济学和系统控制 等应用方面的研究。文献[21]中利用半群以及随机卷积的方法给出了解的存在唯一性以及解的相关性质， 同时也给出了随机偏微分方程的相关应用； 文献 [22]中对 Itô-型随机偏微分方程解的遍历性进行了研究；文献[23]中利用利亚普洛夫函数等方法对 Itô-型随机偏微分方程解的几类稳定性做了研究； N. V.Krylov 等利用分析的方法对 Itô-型随机偏微分方程解的 基本理论进行了研究 [24-28] 得到了关于解的 L^p 理论的许多结果； 张希承等利用插值空间理论以及 Malliavin 分析对解的相关正则性进行了研究[29,30]；S.S.Marta 利用 Malliavin 分析对 Itô-型随机偏微分方程解的密度测度的光滑性和绝对收敛性做了研究[31]， 关于随机偏微分方程的解的解的密度测度的光滑性研究还有[32]等。其他关于 Itô-型随机偏微分方程的研究还有很多， 可以参看[33-35]等文献。

对 Itô-型随机时滞微分方程的研究，同样有了很多相关研究文献。如 S. E.A.Mohammed 在专著[36]和讲义[37] 中对 Itô-型随机时滞微分方程解的存在唯一性以及解对初值的依赖性做了研究，其他相关文献有[38-40]等。 时滞微分系统和 Itô-型随机时滞微分方程在控制中的应用研究也得到很多学者的重视，具体一些情况可以看相应的参考文献[41-47,1]等。

随着对 Lévy 过程研究的日益广泛，Lévy 过程日益广泛地被应用到系统控制和经济学领域中。关于 Lévy 过程的 Malliavin 分析理论及其在经济学与控制上的应用得到了越来越多的结果，如 [48-57]等。 同时越来越多的研究者对带跳的 Lévy 过程驱动的随机微分方程即 Lévy 型随机微分方程给出了很多 有意义的结果:如解的存在唯一性[58-64]、 关于 Lebesgre 测度的绝对连续性[65-68]、解的 Malliavin 分析[69-72]、解的不变测度以及解的相关正则性 [17,32,73-75]。最近还出版了几本关于 Lévy-随机微分方程的专著，如[76,77]。 在 Lévy-型随机时滞微分方程也有了很多理论和应用方面的研究，如 Lévy-型随机时滞微分方程解与解的 相应性质，具体可以参看[78-82]等文献。现有的对 Lévy 型随机时滞偏微分方程研究文献中， 主要在较为简单的可分 Hilbert 空间中对 Lévy 型随机时滞偏微分方程进行研究，在一般的 p 次 M 型空间中对随机时滞微分方程的研究还是比较的少。而对不带时滞的随机微分方程在 p 次 M 型空间中的研究已经有[83-85]等文献 。同样的，对于随机时滞微分方程在控制中应用已有很多研究，如[43,45,86]，但是多是限于 Brownian 运动驱动的随机时滞微分方程。本文将对 p 次 M 型空间中带时滞的随机微分方程进行研究；同时也对 Lévy 型随机时滞方程在控制中应用加以研究，尤其是利用级数方法对 Lévy 过程进行处理来研究随机时滞系统的可控性。

1.2. 本文的主要工作

1.2.1 问题的提出与创新

由上一节所给的许多文献中的成果,不难发现，对于 Brownian 运动驱动的随机微分方程而言,无论是随机常微分方程还是随机偏微分方程， 他们的理论研究和应用研究都已经有了较为成熟的体系，也有了许多非常漂亮的结果。这些文献结果中，有些是利用微分方程理论中的 泛函分析的方法得到的，同时也有很大一部分是由微分方程的抽象理论也即是抽象空间中的半群理论得到。当然，抽象空间中的半群理论主用来研究随机偏微分方程。由于无时滞的 Brownian 运动驱动的随机偏微分方程的发展，自然而然的带动了相应的时滞随机微分方程的发展，因而带时滞的各类随机微分方程的理论研究也有了很多有用的结论。

随着经济学研究和系统控制等应用科学的发展，对于系统的随机干扰提出了更多一般的情形，因而引发了对一般 Lévy 过程及其应用的广泛研究，使得一般 Lévy 过程的相关研究与应用成为一个热点。顺理成章地，一般 Lévy 过程驱动的随机微分方程研究也成为了一个热点。由于一般 Lévy 过程与 Brownian 运动这一特殊的 Lévy 过程有着许多相同之处，但是更多的差异导致一般 Lévy 过程比 Brownian 运动要复杂的多。近年来，对于带跳的 Lévy 过程驱动的随机常微分方程相关理论研究有了许多文献，但这些文献中都只是考虑了 Lévy 过程的跳的跳率为常数，若跳率不为常数，而是为与系统有关的一个函数时，那么有什么样的结果呢?当然当跳率不为常数时，随机微分方程所描述的随机系统更切合实际一些。

对于有限维空间和一般的 Hilbert 空间中，一般 Lévy 过程驱动的随机偏微分方程和随机时滞微分方程，利用不动点理论和 Malliavin 分析等 思想方法对解的存在唯一性，甚至解的一些性质，已经存在一些文献给出了相应的结论。那么对于一般的无穷维空间呢，这些结论是否还将成立呢，或者是，要使得结论成立，则条件会变成什么样呢?那么对于随机时滞的微分方程又有什么样的结论呢？同样的，对于随机时滞微分方程在控制中应用已有的很多研究中，多限于 Brownian 运动驱动的随机时滞微分方程，如果驱动随机时滞微分方程的为一般的 Lévy 过程时,那么这一随机时滞微分系统的可控性又会怎样呢？本学位论文将对提出的问题加以研究并得到一些很有意义的结果。

分析已有的结论，不难发现，对于随机微分系统中，解的存在唯一性这一基础理论的研究，大多采用的是 Picard 逐次逼近法和压缩算子的 不动点定理方法来进行的。尽管本学位论文中所考虑的问题较已有的结论中所考虑的问题要复杂一些，但是这一思想方法却还是可用的。 只能是说用老方法去解决遇到的一些新问题，当然这些问题和已经解决的问题不是完全一样的，还有可能会遇到其中可能有新的问题。如第四章中，我们利用不动点定理来证明了解的存在唯一性，但是对于跳率的处理和解的空间我们必须要针对 Levy 过程给出相应的空间，这样我们才可以利用不动点定理进行证明；同样，在第五章中的证明也同样碰到这个问题，我们同样采用针对过程的特点定义新的空间，并证明在这个空间中每个积分都是有意义的，也是在上的，然后再利用不动点定理进行证明；第六章中，

由于证明的是鞅解的存在唯一性，而且 p 的取值范围比第五章要广，并且对算子 A 也没有那么多的要求，这就使得我们必须构造新的空间，这一空间的构造也是基于 Skorohod 空间的方法来，但是由于时滞微分方程，时滞的影响，使得我们在这里对空间的构造更加难，但是我们还是想办法进行解决。也就是说，这里利用了一些常用的方法，将原有的一些结论推广到了一些新的问题当中这些推广不只是在原来方程上的一个简单推广，如将不带时滞的方程的结论推广到带时滞的情形时候，我们知道空间是大不相同的，因此对存在唯一性的讨论也就复杂了很多，总的来说我们的结论还是有着很好的创新性，并对解的相关性质的讨论有着很重要的帮助。现在已完成了一系列论文。本学位论文就是这一系列论文的一个综合与总结。

总的来说，本学位论文主要有下面的一些内容：对无穷维空间中 Lévy 过程的跳率不为常数时的随机常微分方程的基础理论进行了研究；对一般的无穷维空间 p 次 M 型空间中的随机时滞微分方程的解的存在唯一性理论进行了研究，得到了相关结论；利用随机级数的方法，对 Lévy 过程驱动的随机微分方程在控制理论中应用加以研究，得到了一个新的结论。这些结论在目前可查的国际文献中尚未见到。

1.2.2 主要内容

本学位论文主要分为三大部分。

第一部分：即第一章，绪论部分。

简单阐述了随机系统的理论与应用意义，对随机微分方程的相关研究做了综述。其中重点介绍了 Brownian 运动驱动的各种随机微分方程的主要结果和相关方法。同时对一般 Lévy 过程驱动的各种随机微分方程已有的一些结果进行了简单分析。介绍了本学位论文的研究意义与创新。

第二部分：Lévy 过程与随机微分方程的准备知识。

在本部分中，主要介绍了 Lévy 过程的相应的基础知识与随机微分方程的一些基础结论。分为两章，第二章，主要介绍了 Lévy 过程的定义，可分性以及 Lévy 过程的特征和 Lévy-Itô 分解，Itô 公式等基础理论与常用的结论。第三章中主要介绍随机微分方程的基本理论，包括 Brownian 运动驱动的随机常微分方程和随机偏微分方程以及随机时滞微分方程的基本理论和相应的一些结论。对于 Lévy

型随机微分方程，主要介绍了一些已有的 Lévy 型随机微分方程的基础理论。

第三部分：Lévy 过程驱动的随机常微分方程和随机时滞偏微分方程的一些结论。这一部分，主要介绍我在我的导师指导下，在这几年里得到的一些随机微分方程理论和应用中的结果，由四章组成。

第四章，主要讨论 Lévy 过程驱动的随机微分方程，当 Lévy 过程的跳的跳率不为常数，而是为一个与系统相关的函数时，在一个可分 Banach 空间即 2 次 M 型空间中，当方程的系数在一定条件下解的存在性和唯一性。

第五章，对于随机偏微分方程，利用抽象空间中的算子半群方法，也即是考虑方程的适度解，使用了常用的算子的分数幂的方法，研究了 Poisson 随机测度驱动下的随机时滞偏微分方程在 M 型 p 次空间中解的存在和唯一性，其中 $p=1$ 或者 $p=2$。

第六章，同样利用半群方法，对 $p\,(1<p<2)$ 次 M 型 Banach 空间中 Poisson 随机测度驱动的带有限时滞 随机时滞偏微分方程解的存在唯一性和正则性进行研究。将文[84,85]中的 结论扩展到有限时滞的随机偏微分方程。这里的解与上一章的解的定义是不一样的，上一章中的适度解 ，从某种意义上讲是个强的适度解，而这里也是考虑适度解，但是一个弱解，也即为鞅解。

第七章，利用 Gaans 的文章[87]中对 Lévy 过程的级数方法所得到的结论，对 Lévy 过程驱动的随机时滞偏微分系统的渐近可控性进行了研究，这一研究实际上是将文[1]中 Brownian 运动驱动的随机时滞系统的可控性相关结论推广到了 Lévy 驱动的时滞微分系统中。

第二章 Lévy 过程及其随机积分

我们知道，独立增量过程是理论上发展的最早，也是最为成熟的随机过程. Lévy 过程(即随机连续的独立增量过程)是独立增量过程中一个非常重要的分支，同时也是 Feller 过程的最重要的组成部分，它包括了我们熟悉的大部分过程，如：Brownian 运动、Poisson 过程、复合 Poisson 过程以及稳定过程等。它的美丽之处在于它有一个极其简洁的分析刻画，同时它也被广泛应用到工程、生物以及经济学领域中。本章主要为后面几章作相关的知识准备。本章主要内容为：简要介绍 Lévy 过程的主要性质和 Lévy 过程的相关随机积分。

2.1 Lévy 过程及其无穷可分性

Lévy 过程是为了纪念法国数学家 Paul Lévy 对这一类随机过程的研究所作出的贡献而以其名字命名的。在介绍 Lévy 过程之前，首先介绍随机过程的随机连续。随机过程 $X(t,\omega)$ 称为是随机连续的，如果 $\forall\varepsilon>0$， 都有

$$P\{|X(t,\omega)-X(t_0,\omega)|\geq\varepsilon\}\to 0(t\to t_0).$$

为了介绍 Lévy 过程，必定要先给出相应的概率空间，令 (Ω,F,P) 为一个完备的概率空间。

定义 2.1 一个在概率空间 (Ω,F,P) 中适应的随机过程 $X(t),t\geq 0$ 若满足:

1.几乎处处有 $X(0)=0$；

2. $X(t)$ 为平稳增量过程，也即对所有的 $0<s<t<\infty$, $X(t)-X(s)$ 和 $X(t-s)$ 具有相同的分布；

3. $X(t)$ 为独立增量过程，也即对所有的 $0\leq s\leq t<\infty$, $X(t)-X(s)$ 与自然域流 F_s 独立；

4. $X(t)$ 为随机连续的；

则称过程 $X(t)$ 为 Lévy 过程。

由上述定义可知，Lévy 过程即为几乎处处有 $X(0)=0$ 的随机连续的独立增量过程。利用 Lévy 过程的特征函数(即对过程 $X(t)$ 的 Fourier 变换)可以得到如下结论：

定理 2.1.1 若 $X(t)$ 为一个 Lévy 过程，则 $X(t)$ 存在唯一右连左极的(cádlág)

的修正$Y(t)$，并且$Y(t)$也是 Lévy 过程。

证明 详细的证明可以参考 P.E.Protter 2004 年的书[88]中第一章定理 30 的证明。

有了定理 2.1.1 的结论，则对任意的 Lévy 过程都有一个右连左极的修正，从而我们讨论 Lévy 过程时，就只考虑它的修正$Y(t)$。

Lévy 过程还有一个重要的性质，即可分性。而且经典的 Lévy 过程和随机变量以及随机过程的无穷可分性是 Kolmogorov、Lévy 和 Khintchine 在上世纪 30 年代发现的，经过几十年的发展得到了广泛的应用和很大的推广。首先，给出由概率测度的卷积来定义的可分：若 μ 为一概率测度，记$\mu=\mu*\mu*\cdots*\mu$ (n 次)，其中*表示卷积。如果有一个概率测度$\mu^{\frac{1}{n}}$ 使得$(\mu^{\frac{1}{n}})^{*n}=\mu$，则称$\mu^{\frac{1}{n}}$为$\mu$的 n 次卷积，称$\mu$存在 n 次卷积根；一个概率测度为无穷可分的即对任意的$n\in N$，μ都存在唯一的 n 次卷积根$\mu^{\frac{1}{n}}$。引入无穷可分的定义后，可给出如下的结论：

定理 2.1.2 [89,定理 2.3] μ是无穷可分的，当且仅当对所有的$n\in N$，存在一个概率测度μ_n，有特征函数φ_n使得

$$\varphi_{\mu}(u)=(\varphi_{\mu_n}(u))^n$$

对所有的$\mu,\mu_n=\mu^{\frac{1}{n}}$。

容易看出，对于随机变量，当它的分布函数$P_{\cdot}$是无穷可分的时候，则随机变量也是无穷可分的，即

$$X(\omega)=^d Y_1^{(n)}(\omega)+Y_2^{(n)}(\omega)+\cdots+Y_n^{(n)}(\omega) \tag{2.1.1}$$

其中$Y_1^{(n)}(\omega),Y_2^{(n)}(\omega),\cdots,Y_n^{(n)}(\omega)$是独立同分布的随机变量$n\in\mathbb{N}$。

将(2.1.1)中的随机变量改为随机过程$X(t,\omega)$和$Y_i^{(n)}(t,\omega),i=1,2,\cdots,n$，则称随机过程$X(t)$为无穷可分的。常见的无穷可分变量有：高斯随机变量、Poisson 随机变量和复合 Poisson 随机变量等。对于 Lévy 过程的无穷可分性有如下的结论：

定理 2.1.3 如果$X(t)$是一个 Lévy 过程，则$X(t)$对任意$t\geq 0$都是无穷可分的。

证明：对任给的$n\in N$，则由 Lévy 过程的定义可以将$X(t)$写成

$$X(t)=Y_1^{(n)}(t)+Y_2^{(n)}(t)+\cdots+Y_n^{(n)}(t)$$

其中$Y_k^{(n)}(t)=X(\frac{kt}{n})-X(\frac{(k-1)t}{n})$，则可得$Y_k^{(n)}(t),k=1,2,\cdots,n$为独立同分布的随机过程，从而可得 Lévy 过程是无穷可分的。

对于收敛的 Lévy 过程，它的极限也是 Lévy 过程。

定理 2.1.4 令 $X(t),t\geq 0$ 是一个随机过程，若存在一列 Lévy 过程

$\{X_n(t), n\in N, t\geq 0\}$，使得对任给的$t\geq 0$，$X_n(t)$依概率收敛于$X(t)$，且对所有的$a>0$有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to 0}\sup P\{|X_n(t)-X(t)|>a\}=0$$

则$X(t)$为一个 Lévy 过程。

2.2 Lévy - Itô 分解

对于 Lévy 过程，Paul Lévy 和 A.Ya. Khintchine 在 1930s 给出了一个非常漂亮的公式，即 Lévy–Khintchine 公式.

Lévy–Khintchine 公式： 令$X(t)$是一个 Lévy 测度为$\nu(\cdot)$的 Lévy 过程，则对$\nu(\cdot)$有 $\int_R min(1,z^2)\nu(dz)<\infty$ 和

$$Ee^{iuX(t)}=e^{t\varphi(u)} \qquad u\in\mathbb{R} \tag{2.2.1}$$

其中

$$\varphi(u)=i\alpha u-\frac{1}{2}\delta^2u^2+\int_{|z|\leq C}\{e^{iuz}-1-iuz\}\nu(dz)+\int_{|z|\geq C}(e^{iuz}-1)\nu(dz) \tag{2.2.2}$$

反过来，对给定的常数α,δ^2和一个测度$\nu(\cdot)$满足$\int_R min(1,z^2)\nu(dz)<\infty$ 则存在一个 Lévy 过程$X(t)$(分布唯一的)满足(2.2.1)。

对于高维空间，则上述(2.2.1)和(2.2.2)分别变为：

$$Ee^{i(u,X(t))}=e^{t\varphi(u)}$$

$$\varphi(u)=i(b,u)-\frac{1}{2}(u,Au)+\int_{R^d-\{0\}}\{e^{i(u,z)}-1-i(u,z)\chi_{\hat{B}}(z)\}\nu(dz)$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示内积，b和A分别为向量和矩阵。

同样对于无穷可分的随机过程，也有同样的 Lévy–Khintchine 公式。关于 Lévy–Khintchine 公式的证明可以参看[89]定理 1.2.14。 由 Lévy–Khintchine 公式可将(α,δ^2,ν)(或(b,A,ν))称为 Lévy 过程的$X(1)$的特征。

定理 2.2.1 任意一个 Lévy 过程都是 Feller 过程。

定理 2.2.1 的证明可以参考[89]。

前一节中，得到了 Lévy 过程存在右连左极的修正，则 Lévy 过程的轨道只存在一类间断点即跳跃间断点.记$X(t-)=\lim_{s\uparrow t}X(s)$为$X(t)$在$t$点的右极限。定义$\Delta X(t)=X(t)-X(t-)$。如果$\sup|\Delta X(t)|\leq C<\infty$，其中$C$为非随机常数，则称$X(t)$

有有界跳。

定理 2.2.2 令$X(t)$为一个 Lévy 过程，且$X(t)$的跳为下有界的，则对所有的$n\in N$都有$E[|X(t)|^n]<\infty$。

定理的证明可以参考 P.E.Protter[88]中第一章定理 34 的证明。

定义 2.2. $N(t,A)=\sum_{0<s<t}\chi_A(\Delta X_s)$。

则可以推出$N(t,A)$是一个 Poisson 过程，令$\nu(A)=EN(t,A)$，可得，$N(t,A)$和$\nu(A)$皆为σ-有限测度，而且$\nu(A)=EN(t,A)$还可以为 Lévy 过程的 Lévy 测度。记$\widetilde{N}(t,A)=N(t,A)-t\nu(A)$，称$\widetilde{N}(t,A)$为$N(t,A)$的补偿子。令$f$为一个 Borel 可测函数，$A$为一个有界集，由测度$N(t,A)$可以定义一个关于测度$N(t,A)$的积分：

$$\int_A f(z)N(t,dz)=\sum_{z\in A}f(z)N(t,\{z\}), \tag{2.2.3}$$

当$f(z)=z$时，(2.2.3)为

$$\int_A zN(t,dz)=\sum_{0<u<t}\Delta X(u)\chi_A(\Delta X(u)). \tag{2.2.4}$$

从而对 Lévy 过程$X(t)$有以下的 Lévy-Itô 分解。

定理 2.2.3 [89，定理 2.4.16] 设$X(t)$为一个 Lévy 过程，则$X(t)$可以分解为

$$X(t)=at+bB(t)+\int_{|z|\le R}z\widetilde{N}(dt,dz)+\int_{|z|\ge R}zN(dt,dz) \tag{2.2.5}$$

其中a,b为常数，$B(t)$为 Brownian 运动与$N(t,A)$是独立的.若为高维空间，则(2.2.5)中a为向量，b为一个矩阵，$B(t)$为高维 Brownian 运动。

2.3 Poisson 随机测度

我们知道，Lévy 过程是一个半鞅，而随机测度是研究半鞅的跳的最有用的工具，运用跳测度可以建立半鞅的积分表示。有趣的是，前面提到的十分经典的 Lévy 过程的 Lévy–Itô 分解就是半鞅积分表示的特殊形式。

设$(E,\Im)$为可测空间，定义

$$\widetilde{(\Omega,F)}=(\Omega\times\mathbb{R}^{+}\times E;F\times B(\mathbb{R}^{+})\times B(E))$$

定义 2.3 $\Omega\times\mathbb{R}^{+}\times E$ 上的非负函数 μ 称为随机测度，若

1).对没有个 $\omega\in\Omega$，$\mu(\omega,\cdot)$ 是 $B(\mathbb{R}^{+}\times B(E))$ 上的 σ-有限测度；

2).对每一个 $A\in B(\mathbb{R}^{+})\times B(E)$，$\mu(\cdot,A)$ 是 (Ω,F) 上的随机变量。

对 $\tilde{A}\in\widetilde{F}$ 定义

$$M_{\mu}(\tilde{A})=E[\int_{\mathbb{R}^{+}\times E}\chi_{\tilde{A}}(\omega,t,x)\mu(\omega,dt,dx)]$$

则 M_{μ} 是 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{F})$ 上的测度，并称之为 μ 产生的测度。若 M_{μ} 为有限测度：$M_{\mu}(\widetilde{\Omega})<\infty$，则称 μ 为可积的。 设 $\varphi\in\widetilde{F}$ 若对每一个 $t\geq 0$，

$$\int_{[0,t]\times E}|\varphi|\,d\mu<\infty$$

则 $\varphi*\mu=\int_{[0,t]\times E}\varphi d\mu,t\geq 0$，是一个有限变差过程。随机测度 μ 称为可料的，若对任意使得 $\varphi*\mu$ 存在的可料函数 φ，$\varphi*\mu$ 是一个可料过程。

引理 2.3.1. [90，引理 11.4] 设 μ 是一个可选的(可料的)随机测度，Φ 是一个可料非负实函数，则 $\nu=\varphi*\mu$ 是一个可选(可料)随机测度。

若随机测度 $\mu(A)$ 对所有 $\mu(A)<\infty$ 都有 Poisson 分布，则称它为 Poisson 随机测度，从而对 $\mu(A)$ 可得 $\lambda(A)=E(\mu(A))$ 为一 σ-有限测度，从而有以下结论。

定理 2.3.2. 设 λ 为可测空间 E 上 σ-有限测度，则存在一个 Poisson 随机测度 μ 在概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{F},\widetilde{P})$ 上满足 $\lambda(A)=E(\mu(A))$ 对所有的 $A\in B(\mathbb{R}^{+})\times B(E)$。

证明 可以看[89]定理 2.3.4。

如果集合 $A\in B(E-0)$ 有 $0\overline{\in}\bar{A}$，则 A 是下有界的。

由随机测度的定义，可以得到以下结论：第二节中的 $N(t,A)$ 为 Poisson 随机测度，$\tilde{N}(t,A)=N(t,A)-t\nu(A)$ 为补偿 Poisson 随机测度，这里 $\nu(A)=E(N(1,A))$，A 为下有界的。

对于随机测度，可以得到关于随机测度的随机积分，以及关于补偿随机测度的随机积分。这里我们介绍一个关于 Poisson 随机测度积分的一个结论。

定理 2.3.3. [91，定理 8.10] 令 A 下有界的，f 为 Borel 可测函数，则

(1)对所有的$t\ge 0$，$\int_A f(x)N(t,dx)$有复合 Poisson 分布，满足对$u\in E$有

$$E(\exp[i(u,\int_A f(x)N(t,dx))])=\exp[t\int_A e^{i(u,x)}-1)\mu_f(dx)]$$

其中$\mu_f=\mu\circ f^{-1}$；

(2)若$f\in L^2(A,\mu_A)$，则有

$$E(\int_A f(x)N(t,dx))=t\int_A f(x)\mu(dx);$$

(3)若$f\in L^2(A,\mu_A)$，则

$$E\{(\int_A f(x)N(t,dx)-t\int_A f(x)\mu(dx))^2\}=t\int_A (f(x))^2\mu(dx).$$

若记$J_t^A=\sum_{0<s<t}\Delta X_s\chi_A(\Delta X_s)$，其中$X_t$为 Lévy 过程，则$J_t^A=\int_A xN(t,dx)$。同样的$J_t^A$也为 Lévy 过程。这些结论我们可以参考[88]。对于随机测度 $N(t,A)$，$E(N(1,A))=\nu(A)$为X_t的 Lévy 测度，这是在前面已经给出的。

2.4 随机积分与 Itô 公式

本节主要利用前一节中给出的关于随机测度的积分将 Itô 的对 Brownian 运动积分的定义推广到对一般的 Lévy 过程。 首先，由 Lévy-Itô 分解，定义下面的鞅值测度

$$M(t,E)=B(t)\delta_0(E)+\tilde N(t,E-\{0\})$$

E为 Borel 可测的，$B(t)$为 Brownian 运动，$M(t,E)$满足以下性质：

a.对所有的$0\le s<t<\infty$，$M((s,t],E)=M(t,E)-M(s,E)$而且与F_s独立；

b.$EM((s,t],E))=0$；

c.对$\rho((s,t],E)=(t-s)(\delta_0(E)+\nu(E-\{0\}))$有$E(M((s,t],E))^2=\rho((s,t],E)$。

这样，由 Brownian 运动和随机测度积分可得一个积分定义

$$\int_0^t\int_E F(s,x)M(ds,dx)=\int_0^t G(s)dB(s)+\int_0^t\int_{E-\{0\}}F(s,x)\tilde N(ds,dx)$$

其中$G(s)=F(s,0)$，那么上面式子的积分中$F(s,x)$应该满足什么要求？为了回答这一问题，使用类似于 Itô 积分的方法，首先定义简单过程的随机积分。定义$H_2(T,E)$为所有函数$F:[0,T]\times E\times\Omega\to\mathbb{R}$所构成的线性空间，并且关于$\rho\times P$几

乎处处满足以下条件：

$F(s,x)$ 是可料的而且满足 $\int_0^T \int_E E(|F(t,x)|^2)\rho(dt,dx) < \infty$。

用 $S(T,E)$ 表示在 $H_2(T,E)$ 中所有简单过程所构成的线性空间，即

$$F := \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} F_k(t_j)\chi_{(t_j,t_+]}\chi_{A_k},$$

其中 $F_k(t_j)$ 是一个有界 F_{t_j}-可测的随机变量，对所有的 k 满足 $\nu(A_k) < \infty$。 则不难得到 $S(T,E)$ 在 $H_2(T,E)$ 中稠密。给出 $S(T,E)$ 中函数 F 关于测度 M 的积分定义，

$$I_T(F) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} F_k(t_j)M((t_j,T_{j+1}],A_k).$$

由于 $S(T,E)$ 在 $H_2(T,E)$ 中稠密，从而由上面定义容易得到 $F \in H_2(T,E)$ 关于 M 的积分，而且有以下结论

定理 2.4.1. [89] 如果 $F,G \in H_2(T,E)$ 和 $a,b \in R$ 则

1. $I_T(aF+bG) = aI_T(F) + bI_T(G)$；

2. $EI_T(F) = 0, E(I_T(F)^2) = \int_0^T \int_E E|F(t,x)|^2)\rho(dt,dx)$；

3. $I_t(F), t \geq 0$ 是 F_t 适应的；

4. $I_t(F), t \geq 0$ 是平方可积鞅。

我们可以将随机积分定义推广到线性空间 $P_2(T,E)$ 中。空间 $P_2(T,E)$ 为所有关于 $\rho \times P$ 几乎处处可测函数 $F:[0,T] \times E \times \Omega \to R$ 构成，同时满足

1. $F(s,x)$ 为可料的； 2. $P\{\int_0^T \int_E |F(t,x)|^2 \rho(dt,dx) < \infty)\} = 1$。

下面看 Lévy-型随机积分的分解。取 $E = \hat{B} - \{0\}$，对所有有界的过程 $Y(t), t \geq 0$，如果它可以写成：

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y(0) + \int_0^t G(s)ds + \int_0^t F(s)dB(s) + \int_0^t \int_{|x|<1} H(s,x)\tilde{N}(ds,dx) \\ &\quad + \int_0^t \int_{|x|\geq 1} K(s,x)N(ds,dx) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

则称过程 $Y(t), t \geq 0$ 为一个 Lévy-型随机积分。上面的式子中 $|G|^{\frac{1}{2}} < \infty$、

$F(s)\in P_2(T)$、 $H\in P_2(T,E)$ 和 K 为可料的，$B(s)$ 为 Brownian 运动，N 为 Poisson 随机测度 ，其补偿测度为 $\tilde{N}=N-t\nu$ 。显然 $Y(t)$ 为一个半鞅，将(2.4.1)可以写成一个微分形式

$$\begin{aligned} dY(t) &= \int_0^t G(t)dt+F(t)dB(t)+\int_{|x|<1}H(t,x)\tilde{N}(dt,dx) \\ &\quad +\int_{|x|\geq 1}K(t,x)N(dt,dx). \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

对于(2.4.1)中的 Lévy-型随机积分有如下的 Itô 公式。

Itô 公式 1：

$$\begin{aligned} f(Y(t))-f(Y(0)) &= \int_0^t \partial_i f(Y(s-))dY_c^i(s)+\frac{1}{2}\int_0^t \partial_i\partial_j f(Y(s-))d[Y_c^i,Y_c^j] \\ &\quad +\int_0^t\int_{|x|\geq 1}[f(Y(s-)+K(s,x))-f(Y(s-))]N(ds,dx) \\ &\quad +\int_0^t\int_{|x|<1}[f(Y(s-)+H(s,x))-f(Y(s-))]\tilde{N}(ds,dx) \quad ; \\ &\quad +\int_0^t\int_{|x|<1}[f(Y(s-)+H(s,x))-f(Y(s-)) \\ &\quad -H^i(s,x)\partial_i f(Y(s-))]\nu(ds,dx), \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

其中 Y_c 表示 Y 的连续部分，即

$$Y_c(t)=\int_0^t G(s)ds+\int_0^t F(s)dB(s),$$

上面的(2.4.3)也可以用下式表示

Itô 公式 2：

$$\begin{aligned} f(Y(t))-f(Y(0)) &= \int_0^t \partial_i f(Y(s-))dY^i(s)+\frac{1}{2}\int_0^t \partial_i\partial_j f(Y(s-))d[Y_c^i,Y_c^j] \\ &\quad +\sum_{0\leq s\leq t}[f(Y(s))-f(Y(s-))-\Delta Y^i(s)\partial_i(Y(s-))], \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

式子中的 $\Delta Y(s)$ 为 Y 在 s 点的跃度。

Itô's 乘积公式：如果 Y^1 和 Y^2 都为实值 Lévy-型随机积分，则对 $t\geq 0$ 以概率 1 有

$$\begin{aligned} Y^1(t)\cdot Y^2(t) &= Y^1(0)\cdot Y^2(0)+\int_0^t Y^1(s-)dY^2(s) \\ &\quad +\int_0^t Y^2(s-)dY^1(s)+[Y^1,Y^2](t). \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

第三章　随机微分方程和随机时滞微分方程

随机微分方程理论是 K.Itô 先生在 1942 年首创的，从那以后，随着理论的发展，随机微分方程的发展主要注重两个方面。一个方面是，应用随机微分方程以及与之相应的二阶微分算子来研究扩散过程；另一个方面是，研究方程本身，将随机微分方程看做为一个受噪声干扰的微分系统。其中很多一部分对随机微分方程的研究都注重第二个方面。

随着随机过程理论以及随机分析理论的发展，随机微分方程被广泛应用到系统控制、生态学以及经济学领域上。很多关于随机微分方程的研究主要关注的是 Brownian 运动驱动的随机微分方程。近年来，随着 Lévy 过程及其应用得到了广泛的研究和应用，带跳的 Lévy 过程驱动的随机微分方程得到了很大的发展，Rong.Situ 在[76]中专门研究了带跳的随机微分方程的理论及在控制和金融中应用。Protter 在他的专著[88]中则研究了一般半鞅驱动的随机微分方程。

本章主要简要介绍 Lévy 过程驱动的随机微分方程的一般结论和随机时滞微分方程的一般结论。

3.1 Lévy 过程驱动的随机微分方程

本节主要介绍带跳的 Lévy 过程驱动的随机微分方程解的存在唯一性的条件以及强解，弱解的相关定义。

令 (Ω,F,P) 是一个完备的概率空间，其域流为 $\{F_t,t\geq 0\}$，$B(t)$ 表示标准的 Brownian 运动，$N(t,x)$ 为一个与 $B(t)$ 独立的 Poisson 随机测度，其补偿测度为 $\tilde{N}(t,x)$。ν 为 $N(1,x)$ 的密度测度，从而 ν 为一 Lévy 测度。$B(t),N(t,x)$ 与 F_0 独立。随机微分方程 实际上就是确定性方程

$$dY(t)=b(Y(t)dt, \tag{3.1.1}$$

加上一个随机干扰，一般性的研究可以记为(3.1.1)加上半鞅。当方程(3.1.1)加上一个 Lévy 过程时，方程变为

$$\begin{aligned} dY(t) &= b(t,Y(t))dt+\sigma(t,Y(t-))dB(t) \\ &\quad +\int_{|x|<c}F(t,Y(t-),x)\tilde{N}(dt,dx) \\ &\quad +\int_{|x|\ge c}G(t,Y(t-),x)N(dt,dx), \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

若上式中的系数函数 $b(t,Y(t)),\sigma(t,Y(t-)),F(t,Y(t-),x)$ 和 $G(t,Y(t-),x)$ 分别为 $b(Y(t))$，$\sigma(Y(t-)),F(Y(t-),x),G(Y(t-),x)$ 则方程(3.1.2)为自治的。

这里介绍强解与弱解的定义。适应可料过程 $Y(t)$ 称为方程(3.1.2)的强解，即对给定的概率空间中的 $B(t)$ 和 $N(t,x)$，$Y(t)$ 满足方程(3.1.2)，若 $Y_1(t),Y_2(t)$ 都为方程(3.1.2)的解，如果有 $P(Y_1(t)=Y_2(t),t\ge 0)=1$ 则称解为轨道唯一的。如果由方程找到一组过程 $B(t),N(t,x)$，并由过程生成一个域流 F 和概率 P，并有对应 $Y(t)$ 使得方程(3.1.2)成立，则称 $(\Omega,F,P,B(t),N(t,x),Y(t))$ 为方程(3.1.2)的弱解。弱解的分布唯一性是指 $(\Omega,F^1,P^1,B^1(t),N^1(t,x),Y^1(t))$ 和 $(\Omega,F^2,P^2,B^2(t),N^2(t,x),Y^2(t))$ 为方程(3.1.2)的弱解，如果对任何 $t\ge 0$ 时 $A\in B(E)$ 都有

$$P^1(Y^1(t)\in A)=P^2(Y^2(t)\in A)$$

弱解也常称为鞅解，它是随机微分方程对应的鞅问题的解。

首先看方程(3.1.2)的修正形式，即

$$\begin{aligned} dY(t) &= b(t,Y(t))dt+\sigma(t,Y(t-))dB(t) \\ &\quad +\int_{|x|<c}F(t,Y(t-),x)\tilde{N}(dt,dx), \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

对方程(3.1.3)，当系数 b,σ 和 F 满足 Lipschitz 条件时，得解是存在唯一的，结论如下：

定理 3.1.1. [76，定理 117] 假设

1）函数 b 和 σ 为 $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\times\Omega\to R^d$ 的，

$$F:R^+\times R^d\times Z\times\Omega\to R^d$$

而且都是关于 t,x 和 ω 可测的，同时也都是 F_t-适应的。对 F 更是 F_t 可料的。并且对函数 b、σ 和 F 都是 P-a.s.满足

$$|b(t,x,\omega)|\le C(t)(1+|x|)$$

$$|\sigma(t,x,\omega)|^2+\int_Z|F(t,x,\omega,z)|^2\nu(dz)\le C(t)(1+|x|^2)$$

其中$C(t)$为一个非负确定性函数满足$\int_0^T C(t)dt<\infty$；

2）$|b(t,x,\omega)-b(t,y,\omega)|\le C(t)(|x-y|)$

$$|\sigma(t,x,\omega)-\sigma(t,y,\omega)|^2+\int_Z |F(t,x,\omega,z)-F(t,y,\omega,z)|^2\,\nu(dz)\le C(t)(|x-y|^2)$$

其中$C(t)$同样为个非负确定性函数满足$\int_0^T C(t)dt<\infty$；

3）$Y(0)\in F_0$且$E|Y(0)|^2<\infty$

则方程(3.1.3)存在一个轨道唯一的解$Y(t)$是F_t-适应的。

对于方程(3.1.2)的解的存在唯一性，利用交结(interlacing)方法可以得到以下结论：

定理 3.1.2. 若b,σ和F满足定理 3.1.1 中的条件，对G满足当$|z|>c$时$G(y,z)$关于y是连续的，则方程(0) 存在一个唯一的右连左极的F_t-适应的解。

证明 令$(\tau_n,n\in N)$为复合 Poisson 过程$(P(t),t\ge 0)$的到达时，这里$P(t)=\int_{|z|>c}N(t,dz)$，可以由定理 3.1.1 出发来构造方程(3.1.2)的解，

$$\begin{aligned}
&Y(t)=Z(t) && \text{当}0\le t<\tau_1\text{时}\\
&Y(\tau_1)=Z(\tau_1-)+G(Z(\tau_1-),\Delta P(\tau_1)) && \text{当}t=\tau_1\text{时}\\
&Y(t)=Y(\tau_1)+Z(t)-Z(\tau_1) && \text{当}\tau_1<t<\tau_2\text{时}\\
&Y(\tau_2)=Z(\tau_2-)+G(Z(\tau_2-),\Delta P(\tau_2)) && \text{当}t=\tau_2\text{时}\\
&\cdots
\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

由此类推下去可以得到方程(3.1.2)的解，这里的$Z(t)$为来源于方程(3.1.2)，从而由定理 3.1.1 容易得到$Y(t)$是 cádlág 适应的而且满足(3.1.2) 从而定理得证。

对于随机微分方程还有其他非常重要的结论，如 Girsanov 公式、Yamada-watanab 型定理，这里不做介绍，可以参看相应的专著[76]等。

若上述方程中加上一个偏微分算子，则系统成为了一个随机偏微分方程。这里对随机偏微分方程，主要介绍适度解的定义及其存在唯一性定理。这里考虑的空间为可分 Hilbert 空间。令$(H,<,>)$为一个可分的 Hilbert 空间，$<,>$为H中的内积，$(Z,B(Z),\nu)$为一个σ-有限测度空间。

考虑下面的H中的随机偏微分方程

$$\begin{cases} dX(t)=[AX(t)+F(X(t))]dt+G(X(t),z)\tilde{N}(dt,dz)t>0 \\ X(0)=x \end{cases} \tag{3.1.5}$$

对方程(3.1.5)中假设

a.微分算子 $A:D(A)\subset H\to H$ 为一个 C_0-半群 $\{S(t),t\geq 0\}$ 的无穷小生成元；

b.函数 $F:H\to H$ 为 $B(H)/B(H)$ 可测的；

c.$G:H\times Z\to H$ 是 $B(H)\times B(Z)/B(H)$ 可测的,并且 G 是可料的；

d.$x\in H$ 为 F_0-可测的随机变量。

对半群 $S(t)$ 的相关性质可以参看 Pazy[92]。

适度解： 称 H 中的可料过程 $X(t)$ 为方程(3.1.5)的适度解,若几乎处处有

$$\begin{aligned} X(t)=S(t)x+&\int_0^t S(t-s)F(X(s))ds \\ &+\int_0^t\int_Z S(t-s)G(X(s-),z)\tilde{N}(ds,dz) \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

对所有的 $t\in[0,T]$，其中上述的积分和随机积分都是有意义的。

对于随机偏微分方程，由偏微分方程理论可知，对随机偏微分方程的研究方法也可以分为两类：一类为变分法，此时的解为变分意义下的弱解；另一个方法是算子半群的方法，这一个方法得到的解为适度解。在偏微分方程理论中，适度解和弱解是等价的。对于随机偏微分方程，C.Knoche 在[61]中证明了也有同样的结论。

定理 3.1.3. [61，推论 5.3]令 $X(t),t\in[0,T]$ 为方程(3.1.5)的适度解，若

$$\int_0^t S(t-s)F(X(s))ds \quad \text{和} \quad \int_0^t\int_Z S(t-s)G(X(s-),z)\tilde{N}(ds,dz),$$

对 $t\in[0,T]$ 有可料版本，且对所有的 $\xi\in D(A^*)$

$$\int_0^T \| F(X(s))\| ds<\infty$$

$$\int_0^T E[\int_0^t\int_Z |\langle S(t-s)G(X(s-),z),A^*\xi\rangle|^2 \nu(dz)ds]dt<\infty,$$

则 $X(t)$ 是一个变分意义下的弱解，即对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $\xi\in D(A^*)$ 有

$$<X(t),\xi> \;=\; <x,\xi>+<X(t),A^{*}\xi>+\int_0^t <F(X(s)),\xi>ds$$
$$+\int_0^t\int_Z <G(X(s-),z),\xi>\tilde{N}(ds,dz) \qquad P.a.s.$$

下面介绍解的存在唯一性结论，首先给出所需的空间。

$$H^p(T,H) \;:=\; \{Y(t),t\in[0,T]\,|\,Y\text{有}H-\text{值的可料修正,}$$
$$Y(t)\in L^p(\Omega,F_t,P;H)\text{且}\sup_{t\in[0,T]}E[\|Y(t)\|^p]<\infty$$

定义H^p中的半范数为

$$\|Y\|_{H^p}:=\sup_{t\in[0,T]}(E[\|Y(t)\|^p])^{\frac{1}{p}}.$$

为了得到解的存在唯一性,还得有以下假设

假设 H(1):

（1）$F:H\to H$是 Lipschitz 连续的,即存在常数C使得对$x,y\in H$有

$$\|F(x)-F(y)\|\le C\|x-y\|$$
$$\|F(x)\|\le C(1+\|x\|);$$

存在一个可积的$K:[0,T]\to[0,\infty)$使得对所有的$t\in[0,T]$和$x,y\in H$有

$$\int_Z\|S(t)(G(x,z)-G(y,z))\|^2\nu(dz)\le K(t)\|x-y\|^2$$
$$\int_Z\|S(t)(G(x,z)\|^2\nu(dz)\le K(t)(1+\|x\|^2).$$

定理 3.1.4. [61，定理 5.4] 假设算子为前面提到的线性微分算子，存在一个C_0-半群$S(t)$, A为$S(t)$的无穷小生成元。 函数F和G都满足假设 H(1)，则对任意的初始$x\in L_0^2$，存在唯一的$X(t),t\in[0,T]$在$H^2(T,H)$中使得方程(3.1.6)成立，特别的还有 $X^x:L_0^2\to H^2(T,H)$是 Lipschitz 连续的。

3.2 随机时滞微分方程

随机时滞微分方程是一类特殊的随机微分系统：系统中，系统的发展依赖于过去一些时刻的状态。 随机时滞微分方程作为生态学、化学、物理以及经济学中随机模型是 非常重要的。 S.A.Mohammed 在[37]中列举了几个常见的随机时滞微分方程：

$$\begin{cases} dX(t) = F(X(t-r))dW(t), & t > 0 \\ X(s) = \eta \in C([-r,0],R), \end{cases} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{cases} dX(t) = \{\alpha X(t) + \beta X(t-r)\}dt + \sigma dW(t), & t > 0 \\ (X(0),X(s)) = (v,\eta) \in R \times L^2([-r,0],R), \end{cases} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{cases} dX(t) = [\alpha - \beta X(t-r)\}X(t)dt - \gamma dW(t), & t > 0 \\ X(s) = \eta(s) \in C([-r,0],R), \end{cases} \tag{3.2.3}$$

$$\begin{cases} dX(t) = \{\int_{[-r,0]} X(t+s)dW(s)\}dW(t), & t > 0 \\ (X(0),X(s)) = (v,\eta) \in R \times L^2([-r,0],R) & r \geq 0, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

对于以上的四个随机时滞微分方程，在[37]中将其归结为一类方程

$$\begin{cases} dX(t) = h(t,X_t)dt + g(t,X_t)dW(t), & t > 0 \\ X_0 = \eta \in C([-r,0],R), \end{cases} \tag{3.2.5}$$

式中的 X_t 为一个分段(segent)过程，定义为对确定的 $r>0$，$X_t(s) = X(t+s), s \in [-r,0]$，$C([-r,0];\mathbb{R}^d)$ 为一个 $[-r,0] \to \mathbb{R}^d$ 的连续函数构成的 Banach 空间，范数为 $\|\eta\|_c := \sup_{s\in[-r,0]} |\eta|, \eta \in C([-r,0];R^d)$。其中 $W(t)$ 表示 m 维的 Brownian 运动。$L^2(\Omega, C([-r,0];R^d))$ 表示所有的 $F \times B(C([-r,0];R^d))$ 可测的 映射

$\Omega \to C([-r,0];R^d)$ 构成的 Banach 空间，范数为

$$\|\cdot\|_{L^2} := (E\|\cdot\|_c^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

(3.2.5)中的漂移系数函数 $h:[0,T] \times L^2((\Omega, C([-r,0];R^d)) \to L^2(\Omega, R^d)$；扩散系数函数 $g:[0,T] \times L^2((\Omega, C([-r,0];R^d)) \to L^2(\Omega, R^{d\times m})$，$\eta$ 为 F_0 可测的过程而且满足 $\eta \in L^2((\Omega, C([-r,0];R^d);F_0)$。

下面给出(3.2.5)中解的存在唯一性(这里的解为强解)，先给出关于 h 和 g 假设。

假设(H2)：

（1）函数 $h(t,x)$ 和 $g(t,x)$ 关于 t 是连续的,关于 x 为一个 Lipschitz 连续的,即

对每一个t有

$$\| h(t,x)-h(t,y)\|_{L^2(\Omega,C([-r,0];R^d))} + \| g(t,x)-g(t,y)\|_{L^2(\Omega,R^{d\times m})} \le L\| x-y\|_{L^2(\Omega,C([-r,0];R^d))}$$

其中$x,y\in L^2(\Omega,C([-r,0];R^d))$，$L$为与时间$t\in[0,T]$独立的 Lipschitz 常数；

（2）对每一个F_t-适应过程$X(\cdot):[0,T]\to L^2(\Omega,C([-r,0];R^d))$，过程$h(\cdot,X(\cdot))$和 $g(\cdot,X(\cdot))$也是F_t-适应的。

定理 3.2.1. 假设h和g满足假设 H(2)，令$\eta\in L^2(\Omega,C([-r,0];R^d);F_0)$，则方程(3.2.5) 存在唯一解 $X(t):[-r,\infty)\times\Omega\to R^d$，初始值为$\eta(s)\in L^2(\Omega,C([-r,0];R^d);F_0)$，并且$t\to X_t$是样本连续的；对给定的初始值$\eta$，唯一性的定义为对所有的$X^\eta$和$Y^\eta$为

$L^2(\Omega,C([-r,0];R^d))$ 中的 F_t 适应过程，都满足方程(3.2.5)，则$P\{\forall t\in[-r,T],X(t)=Y(t)\}=1$。

证明 定理证明可以有逐次迭代逼近方法加以证明。具体的证明可以参考[37]的证明。

对方程(3.2.5)还是有相应的解关于初值的连续性以及解的正则性的结论，同样的可以参考[37]。

前面给出的为几种常见的 Brownian 运动驱动的随机时滞常微分方程，还有一种称为 affine 型的随机时滞微分方程：

$$\begin{cases} dx(t)=\int_{-r}^{0} dA(s)x(t+s)dt+\Sigma dW(t) & t\ge 0 \\ x_0=\eta(s) & s\in[-r,0] \end{cases} \tag{3.2.6}$$

其中$\Sigma\in R^{d\times m}$，方程(3.2.6)对应的确定性的时滞微分方程为

$$\begin{cases} dX(t)=\int_{-r}^{0} DA(s)X(t+s)dt & t\ge 0 \\ X_0=\eta(s) & s\in[-r,0] \end{cases} \tag{3.2.7}$$

有以下结论

定理 3.2.2. 若$x(t)$为(0)的解，$T(t)$为(3.2.7)对应的基础解，则

$$X(t)=x(t)+\int_0^t T(t-s)\Sigma dW(s)t\geq 0, X_0=\eta(s)$$

为(3.2.6)的连续修正解，而且解为唯一的，解 $X(t)$ 还可以表示为

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t)\eta(0)+\int_{-r}^0 dA(u)\int_u^0 T(t-s+u)\eta(s)ds \\ &\quad +\int_0^t T(-s)\Sigma dW(s). \end{aligned}$$

证明可以参考 M.Rei β 的随机时滞微分方程的讲义[93]。

对时滞偏微分方程，主要介绍带跳的 Lévy 过程驱动的随机时滞偏微分方程。考虑如下方程：

$$\begin{cases} dX(t) &= [AX(t)+F(X(t),X(t-r))]dt \\ &\quad +\int_Z G(X(t),X(t-r),z)\tilde{N}(dt,dz)t\geq 0 \\ X(s) &= \eta(s)\in D^b_{F_0}([-r,0];H), s\in[-r,0] \end{cases} \tag{3.2.8}$$

在方程(3.2.8)中，因为驱动的随机过程为带跳的 Lévy 过程，因而解的所在空间不再为 $C([-r,0];R^d)$，所以这里介绍与之相关的空间和准备知识。H,K 为两个实值可分 Hilbert 空间，内积分别为 $<,>$ 和 $<,>_K$，范数分别为 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_K$。$L(K,H)$ 表示从 K 到 H 的有界线性算子，$D([-r,0];H)$ 表示从 $[-r,0]\to H$ 的右连左极的函数构成空间，范数为 $\|\eta\|_D:=\sup_{-r\leq s\leq 0}\|\eta(s)\|$。$D^b_{F_0}([-r,0];H)$ 表示由几乎处处有界的 F_0-可测的函数空间。为了得到方程(3.2.8)的适度解的存在唯一性,需要如下假设：

假设 H(3)：

a.对算子 A 存在一个解析 C_0-半群 $S(t),t\geq 0$ 其无穷小生成元为 A；

b.函数 $F:H\times H\to H, G:H\times H\times K\to H$ 为 Borel 可测的而且满足如下的 Lipschitz 条件和线性增长条件，即存在常数 $C>0$ 对 $x_1,y_1,x_2,y_2\in H$ 有

$$\begin{aligned} &\|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)\|^2+\int_K\|G(x_1,y_2,z)-G(x_2,y_2,z)\|^2\nu(dz) \\ &\qquad\leq C(\|x_1-x_2\|^2+\|y_1-y_2\|^2) \end{aligned}$$

和

$$\|F(x,y)\|^2+\int_K\|G(x,y,z)\|^2\nu(dz)\leq C(\|x\|^2+\|y\|^2);$$

c.存在 $L_0>0$ 和任意的 $x_1,y_1,x_2,y_2\in H$ 有

$$\int_K \| G(x_1,y_2,z)-G(x_2,y_2,z)\|^4 \nu(dz) \le L_0(\| x_1-x_2\|^4+\| y_1-y-2\|^4)$$

和

$$\int_K \| G(x,y,z)\|^4 \nu(dz) \le L_0(\| x\|^4+\| y\|^4).$$

定理 3.2.3. 在假设 H(3)的条件下，方程(3.2.8)存在唯一的适度解。

证明 可以利用不动点定理证明解的存在唯一性，具体的证明看[94,定理 3.1]。

对于随机时滞偏微分方程的解还有其他的结论，这里不一一介绍，有兴趣的可以参看文章后面所列的参考文献。

第四章 一类 Lévy 过程驱动的随机微分方程在可分 Banach 空间的 解的存在唯一性

4.1 引言

前面提到，随机微分方程的起源与发展得益于日本数学家 Itô 提出的对随机过程的 Itô 积分。 经过几十年的发展，随机微分方程已经成为了一个在工程和经济学中非常有用的工具，被 广泛应用到系统科学、工程控制、生态学以及金融经济学领域。对于维纳过程驱动的随机微分方程，现在已经有很多学者 对此进行了研究，如 Da Prato 和 Zabczyk 在文献[21]中对无穷维空间的随机偏微分方程的解的存在性和唯一性及其它的相关性质进行了研究；刘凯在[23] 中研究了维纳过程驱动的随机微分方程的稳定性；其他还有很多研究者利用 Malliavin 分析研究了维纳过程驱动的随机微分 方程解关于Lebesgue测度的绝对连续性以及解的分布函数的光滑性。当然更多关于维纳过程驱动的随机微分方程的研究可以参看相关的参考文献。

对于带跳的 Lévy 过程驱动的随机微分方程，由于带跳的 Lévy 过程更能模拟实际，尤其是金融中的相关利率或股价波动 ，因而近年来对带跳的 Lévy 过程驱动的随机微分方程的研究成为一个热点。 文献[76]对带跳的随机微分方程理论以及在金融和控制中的应用做了研究，文献[95,85]中对可分 Banach 空间 p 次 M 型空间中 Poisson 随机测度驱动的随机微分方程解的存在唯一性进行了研究。上述研究中 ，Lévy 过程的跳率皆为常数。当跳率不为常数时，文献[68,67]研究了在一定条件下一维随机微分方程解的关于 Lebesgue 测度的绝对连续性和相关光滑性，即如下方程

$$\begin{cases} dX(t)=b\big(X(t-)\big)dt+\int_0^{+\infty}\int_G h\big(X(t-),z\big)1_{\{u\le\eta(X(t-))\}}N(dt,du,dz) \\ X(0)=x, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

方程(4.1.1)中，跳率函数 $\eta(x)$ 不为常数时。从物理的角度来看，$\eta(x)$ 为常数时候为一些特殊情况，而实际上 $\eta(x)$ 常常不为常数，如描述气体中粒子运动的

Boltzman 方程中，两个粒子的碰撞率很大程度上是依赖于粒子本身的速度而非常数。

本章中主要讨论方程(4.1.1)在一个可分 Banach 空间即 2 次 M 型空间中，当方程的系数在一定条件下解的存在性和唯一性。首先给出 2 次 M 型空间的定义。

定义 4.1 设 U 为可分的 banach 空间，模为 $\|\cdot\|$。如果存在一个常数 K 使得任一 U-值鞅 $(M_k)_{k=1,2,\cdots}$ 有下列不等式成立

$$E\|M_n\|^2\le K\sum_{k=1}^{n}E\|M_k-M_{k-1}\|^2,$$

其中 $M_{-1}=0$，则称空间 U 为 2 次 M 型空间。

这一定义可以参考文献[95,85]。显然，2 次 M 型空间是可分的 banach 空间。

4.2 解的存在性与唯一性

这一节中，主要利用不动点理论讨论方程(4.1.1)解的存在性和唯一性。首先给出相应的空间，令 (Ω,F_t,P) 为完备概率空间，U 为 2 次 M 型空间。随机过程 $Z(t,\omega):[0,T]\times\Omega\mapsto U$，若 $Z(t,\omega)$ 是 F_t 适应的，同时满足

$$\int_0^T E\|Z(t)\|^2\,dt<\infty,$$

将所有满足以上条件的随机过程 $Z(t,\omega)$ 构成的空间 记为 $L_T^2([0,T]\times\Omega;U)$，取模

$\|\cdot\|_{U,T}:=\left(\int_0^T E\|Z(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}$， 则在模 $\|\cdot\|_{U,T}$ 下可以得到一个可分的 Banach 空间

$$L_T^2:=\left\{Z(t)\,|\,Z(t)\in L_T^2([0,T]\times\Omega;U),\text{且满足 }\|\cdot\|_{U,T}<\infty\right\}.$$

对方程(4.1.1)可以写成如下的积分方程

$$\begin{aligned}X(t)&=x+\int_0^t b\big(X(s-)\big)ds\\&\quad+\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_G h\big(X(s-),z\big)1_{\{u\le\eta(X(s-))\}}N(dt,du,dz),t\in[0,T],\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

其中 G 为一可分 Banach 空间，$N(ds,du,dz)$ 为 $[0,T]\times[0,\infty)\times U$ 上的 Poisson 随机测度，其补偿子(密度测度)为 $dsduq(dz)$。此时概率空间 (Ω,F_t,P) 上的域 $F_t:=\sigma\{N(A),A\in B([0,T])\otimes B([0,\infty])\otimes B(U)\}$。系数 $b:U\mapsto U$，$h:U\times G\mapsto U$，

跳率$\eta:U\mapsto R$不为常数。为了得到方程(4.1.1)的解的存在唯一性，对函数b,h和η做如下的假设

假设 (A):

a.函数$\eta(x)$ 满足$\sup\limits_{x\in E}\|\eta\|<\infty$，对任意$x,y\in E$ 有

$\|\eta(x)-\eta(y)\|^2\le C\|x-y\|^2$;

b.函数$b(x)$和$h(x,z)$关于x是 Lipschitz 连续的，即存在常数C使得对$x,y\in E$有

$$\|b(x)-b(y)\|^2+\int_G\|h(x,z)-h(y,z)\|^2\,q(z)\le C\|x-y\|^2$$

c.函数$b(x)$ 满足以下的线性增长条件

$\|b(x)\|^2\le(1+\|x\|^2)$,

函数 $h(x,z)$ 满足存在有界函数$r(z)$有 $\int_G\|r(z)\|^2\,q(z)<\infty$，使得

$$\begin{aligned}\int_G\|h(x,z)\|^2\,q(z)\ &\le(1+\|x\|^2)\cdot\int_G\|r(z)\|^2\,q(z)\\ &\le C\cdot(1+\|x\|^2).\end{aligned}$$

在假设中，C为常数。为了方便，本章中用C代表所有常数，但不是某一固定常数。

定理 4.2.1. 若函数 $b:U\mapsto U$、$h:U\times G\mapsto U$和$\eta:U\mapsto R$为F_t可测，而且假设(A)成立，则对$x\in U$且$\|x\|^2<\infty$，方程(4.1.1)存在唯一的解$X(t)$,并且$X(t)$是右连左极的F_t适应过程使得

$$\|X(t)\|_{U,T}<\infty.$$

为了证明定理 4.2.1，给出以下引理。

引理 4.2.2. [95,定理 3.12] 令函数$f(t,z,\omega)$是一个可料过程并且满足$\int_0^T\int_G E\|f(t,z,\omega)\|^2\,q(dz)dt<\infty$，则$f(t,z,\omega)$ 在$[0,T]\times U$上是关于随机测度$N(dt,dz)$强二次可积的并且有以下等距性

$$E\left[\|\int_0^T\int_G f(t,z,\omega)N(ds,dz)\|^2\right]=\int_0^T\int_G E\left[\|f(t,z,\omega)\|^2\right]dsq(dz).\qquad(4.2.2)$$

证明： 证明请参看[95]中定理 3.12 的证明。

下面证明定理 4.2.1。

证明： 由积分方程(4.2.1)引入以下映射 Φ：

$$\Phi(X(t)) := x + \int_0^t b(X(s-))ds + \int_0^t \int_0^\infty \int_G h(X(s-),z) 1_{\{u \le \eta(X(s-))\}} N(ds,du,dz) \quad (4.2.3)$$

对 $X(t) \in L_T^2$，可以证明 $\Phi(X(t)) \in L_T^2$，

$$\begin{aligned}\int_0^T E\|\Phi(X(t))\|^2 dt &\le 3^2 T \cdot \|x\|^2 + 3^2 \int_0^T E\left\|\int_0^t b(X(s-))ds\right\|^2 dt \\ &+ 3^2 \int_0^T E\left\|\int_0^t \int_0^\infty \int_G h(X(s-),z) 1_{\{u \le \eta(X(s-))\}} N(ds,du,dz)\right\|^2 dt \quad (4.2.4) \\ &:= 3^2 T \cdot \|x\|^2 + I_1 + I_2,\end{aligned}$$

对 I_1，由假设(A)中函数 $b(x)$ 的线性增长条件，可以得到有

$$\begin{aligned} I_1 &\le 3^2 \int_0^T \int_0^t E\|b(X(s-))\|^2 ds dt \\ &\le 3^2 \int_0^T \int_0^t (1 + E\|X(s-)\|^2) ds dt \\ &\le C \cdot (T^2 + T\int_0^T E\|X(t-)\|^2 dt);\end{aligned}$$

对于 I_2，同样由函数 $h(x,z)$ 和 $\eta(x)$ 的线性增长条件以及关于 Poisson 随机测度的等距性，得到

$$\begin{aligned} I_2 &\le 3^2 \int_0^T \int_0^t \int_0^\infty \int_G E\left|h(X(s-),z) 1_{\{u \le \eta(X(s-))\}}\right|^2 ds du q(dz) dt \\ &\le C \sup_{x \in E} \|\eta\|^2 \cdot \int_0^T \int_0^t \int_G E\|h(X(s-),z)\|^2 ds q(dz) dt \quad (4.2.5) \\ &\le C \sup_{x \in E} \|\eta\|^2 \cdot (T^2 + T\int_0^T E\|X(t-)\|^2 dt);\end{aligned}$$

因为 $X(t) \in L_T^2$，将 I_1, I_2 代入(4.2.4)，容易得到

$$\int_0^T E\|\Phi(X(t))\|^2 dt \le 3^2 T \cdot \|x\|^2 + C \cdot (T^2 + T\int_0^T E\|X(t-)\|^2 dt) \le \infty,$$

即 $\Phi(X(t)) \in L_T^2$，这里证明了映射 $\Phi(X(t))$ 是映上的。下面证明它是压缩的。

假设这里有两个过程 $X^1(t), X^2(t) \in L_T^2$ 都使得(4.2.3)成立，则有

$$\begin{aligned}\Phi(X^2(t)) - \Phi(X^1(t)) &= \int_0^t \left[b(X^2(s-)) - b(X^1(s-))\right] ds \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_G [h(X^2(s-),z) 1_{\{u \le \eta(X^2(s-))\}} \quad (4.2.6) \\ &- h(X^1(s-),z) 1_{\{u \le \eta(X^1(s-))\}}] N(ds,du,dz)\end{aligned}$$

对上面等式中右边第一项有

$$E\left\|\int_0^t\left[b(X^2(s-))-b(X^1(s-))\right]ds\right\|^2 \le \int_0^t E\left\|b(X^2(s-))-b(X^1(s-))\right\|^2 ds \le C\cdot\int_0^t E\left\|X^2(s-)-X^1(s-)\right\|^2 ds, \tag{4.2.7}$$

对(4.2.6)中右边的第二项，由函数 $h(x,z)$ 和 $\eta(x)$ 的假设，可以得到

$$\begin{aligned} &E\left\|\int_0^t\int_0^\infty\int_G[h(X^2(s-),z)1_{\{u\le\eta(X^2(s-))\}} -h(X^1(s-),z)1_{\{u\le\eta(X^1(s-))\}}]N(ds,du,dz)\right\|^2 \\ &\le \int_0^t\int_0^\infty\int_G E\left\|[h(X^2(s-),z)1_{\{u\le\eta(X^2(s-))\}} -h(X^1(s-),z)1_{\{u\le\eta(X^1(s-))\}}]\right\|^2 dsduq(dz) \\ &\le C\{\int_0^t\int_G \sup_{x\in E}\|\eta\|^2\left\|h(X^2(s-),z)-h(X^1(s-),z)\right\|^2 q(dz) \\ &\quad+\int_G\sup_{x\in E}E\|h\|^2 q(dz)\cdot E\left\|\eta(X^2(s-))-\eta(X^1(s-)\right\|^2\}ds \\ &\le C\cdot\int_0^t E\left\|X^2(s-)-X^1(s-)\right\|^2 ds, \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

由(4.2.6)、(4.2.7)和(4.2.8)，可以得到如下不等式

$$E\left\|\Phi(X^2(t))-\Phi(X^1(t))\right\|^2\le C\cdot\int_0^t E\left\|X^2(s-)-X^1(s-)\right\|^2 ds, \tag{4.2.9}$$

从而由(4.2.9)可得

$$\begin{aligned} &\int_0^T E\left\|\Phi^n(X^2(t))-\Phi^n(X^1(t))\right\|^2 \\ &\le C^n\cdot\int_0^T\int_0^t ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{n-1}}E\left\|X^2(s_n-)-X^1(s_n-)\right\|^2 ds_n \\ &\le C^n\cdot\frac{T^n}{n!}\cdot\int_0^T E\left\|X^2(s-)-X^1(s-)\right\|^2 dt, \end{aligned}$$

从而映射 Φ 在空间 L_T^2 上是压缩的，这样由 Banach 不动点定理得到存在唯一的不动点 $X(t)\in L_T^2$ 使得 $\Phi(X(t))=X(t)$，即方程(4.1.1)在假设(A)的条件下存在唯一的解。定理得证。

注 1： 当函数 $b(x)$ 和 $h(x,z)$,以及跳率 $\eta(x)$ 不满足 Lipschitz 条件时。如果存在函数 $g(u)$ 是连续有界 非随机函数，当 $u\ge0$ 时，使得

$$\|b(x)\|^2+\|\eta(x)\|^2+\int_G\|h(x,z)\|^2 q(dz)\le g(\|x\|^2);$$

存在函数 $\rho(u)$ 为非随机凸函数，当 $u\ge0$ 时严格增,而且 $\rho(0)=0$，满足

$$\int_{\mathbb{R}^+}\frac{du}{\rho(u)}=\infty.$$

对函数$b(x)$和$h(x,z)$，以及跳率$\eta(x)$有

$$\|b(x)-b(y)\|^2+\int_G\|h(x,z)-h(y,z)\|^2\,q(z)\le\rho(\|x-y\|^2)$$

函数$\eta(x)$ 满足$\sup_{x\in U}\|\eta\|<\infty$，对任意$x,y\in U$ 有

$$\|\eta(x)-\eta(y)\|^2\le\rho(\|x-y\|^2).$$

同样可以证明，方程(4.1.1)在上述条件下解也是存在唯一的，可以用 Picard 迭代的方法类似加以证明，这里不做证明。

注 2： 当方程为随机偏微分方程时，即

$$\begin{cases}dX(t)=AX(t-)dt+\int_0^{+\infty}\int_G h\big(X(t-),z\big)1_{\{u\le\eta(X(t-))\}}N(dt,du,dz)\\ X(0)=x\end{cases}\tag{4.2.10}$$

微分算子A为有界解析半群的生成元，函数$h(x,z)$以及跳率$\eta(x)$满足假设(A)，则类似的方法可以得到方程(4.2.10)的适度解在 2 次M型空间是存在唯一的。

第五章　Poisson 随机测度驱动下的随机时滞微分方程强解的存在性与唯一性

5.1 引言

带有限时滞的随机微分方程广泛的应用到生物、化学、物理以及经济学中的随机模型中。对于 Browian 运动驱动的 随机时滞微分方程，已经有许多相关研究[36,96,93]。文[97]中用半群方法以及算子的分数次 幂的方法研究了 Hilbert 空间中的无穷维随机时滞偏微分方程的适度解存在和唯一性以及解的稳定性。 近年来，由于 Lévy 过程在金融数学和其他随机模型中的广泛用途，Lévy 过程 驱动的随机时滞方程，得到了越来越多的关注，有相当一部分学者对其进行了深入的研究。 文[75,78]中对 Lévy 过程 驱动的随机时滞常微分方程的解和解的相关性质做了研究；文献[84]和[85]中，作者 E.Hausenblas 分别研究了 Poisson 随机测度驱动下的随机 偏微分方程在 M 型 p 次空间中，当系数满足或不满足 Lipschitz 条件下解的存在和唯一性。本章结合文献[97]和文献[84,85,95]，利用算子的分数幂方法研究了 Poisson 随机测度驱动下的随机时滞 偏微分方程在 M 型 p 次空间中解的存在唯一性。

令 $p=1$ 或者 $p=2$，Z 和 U 为可分 Banach 空间，其中 U 为 M 型 p 次空间(定义见[84,85,95])。U 空间中的模用 $\|\cdot\|$ 表示， 用 $|\cdot|$ 表示 Z 空间中的模。(Ω,F,P) 为一个完备的概率空间。随机过程 $Y(t)$ 的状态空间为 $(Z,B(Z))$。同时 $Y(t)$ 是一个 (Ω,F,P) 上的 F_t-加性过程。特别的，$Y(t)$ 为一个 Lévy 过程。从而由 $Y(t)$ 可以得到一个关于它的 Poisson 随机测度 $N(dt,dz)$ 和补偿子：$\pi(dt,dz)$。当 $Y(t)$ 为 Lévy 过程时， $\pi(dt,dz)=dt\nu(dz)$ ，其中 $\nu(dz)$ 为 $Y(t)$ 的 Lévy 测度。$\tilde{N}(dt,dz)=N(dt,dz)-\pi(dt,dz)$ 为定义在 $(\Omega,F,(F_t)_{t\geq0},P)$ 上过程 $Y(t)$ 的补偿随机测度，其中 $(F_t)_{t\geq0}$ 为由 $Y(t)$ 生成的自然 σ 域流。

本章考虑以下由补偿随机测度驱动的随机时滞偏微分方程：

$$\begin{cases} dX(t) = [-AX(t) + f(t, X_t)]dt + \int_Z g(t, X_t, z)\tilde{N}(dt, dz), & t \ge t_0; \\ X_{t_0}(s) = \varphi(t_0 + s) \in L^p(\Omega, C_\alpha), & -h \le s \le 0; \end{cases} \quad (5.1.1)$$

其中φ是F_{t_0}-可测的，$-A$为E上C_0-半群$\{S(t), t \ge 0\}$的无穷小生成元。 假设$0 < \alpha < 1$，Banach 空间$D(A^\alpha)$表示分数幂 算子$A^\alpha : U \to U$的定义域，模为$\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$。令$U_\alpha := D(A^\alpha)$，$C_\alpha = C([-r,0]; U_\alpha)$表示从$[-r,0]$到$U_\alpha$ 连续函数空间。$X_t : [-r,0] \to R, X_t(s) := X(t+s), -r \le s \le 0$。假设: $f : (-\infty, +\infty) \times C_\alpha \to U$ 和 $g : (-\infty, +\infty) \times C_\alpha \to L(Z, U)$。用$MC_\alpha(t, p)$表示所有$L^p(\Omega, C_\alpha)$中$F_t$-可测函数组成的集合，模为

$$E\|\varphi\|_{C_\alpha}^p := E\{\sup_{-h \le s \le 0} \|A^\alpha \varphi(s)\|^p\} < \infty。$$

下面介绍关于补偿随机测度的随机积分的几个结论。

令$\Lambda = Z / \{0\}$，首先定义两个集合

$$M^T(Z/U) := \{f : \mathbb{R} \times \Omega \to L(\Lambda, U), \text{满足}f\text{是关于}\mathbb{R}, \Omega\text{和}U \ \text{Borel可测的，且}f\text{为}F_t-\text{适应的，}\forall t \in [t_0, T]\}$$

和

$$M^{T,p}(Z/U) := \{f \in M^T(Z/U) : \int_0^T \int_\Lambda E\|f\|^p \nu(dz)dt < \infty\}.$$

针对这两个集合中的元素，有以下几个引理。

引理 5.1.1. ([95]，定理 3.10) 令$f \in M^{T,1}(Z/U)$，则f是关于$\tilde{N}(dt, dz)$在$[0,T] \times \Lambda$上强1阶可积的， 而且对任意$0 < t \le T, \Lambda \in B(Z/\{0\})$有

$$E\|\int_0^t \int_\Lambda f(s,z)\tilde{N}(dz, ds)\| \le 2\int_0^t \int_\Lambda E\|f(s,z)\|\nu(dz)ds.$$

引理 5.1.2. ([85])假设E为M型2次的可分Banach空间。令$f \in M^{T,2}(Z/U)$，则f是关于$\tilde{N}(dt, dz)$在$[0,T] \times \Lambda$上强2阶可积的，对任意$0 < t \le T, \Lambda \in B(Z/\{0\})$有

$$E[\sup_{0 < s \le t} \|\int_0^s \int_\Lambda f(\tau, z)\tilde{N}(dz, d\tau)\|^r] \le K_2^2 [\int_0^t \int_\Lambda E\|f(s,z)\|^2 \nu(dz)ds]^{r/2}, 0 < r \le 2,$$

其中K_2为与M型p次的可分Banach空间定义有关的常数。

将空间 $L_p^T([0,T]\times\Omega,(F_t)_{t\in[0,T]})$ 简写为 L_p^T，其中

$$L_p^T([0,T]\times\Omega,(F_t)_{t\in[0,T]}):=\{Z(t,\omega):Z(t,\omega)\text{为}F_t\text{适应的，而且}\ Z(t,\omega)\text{为}[0,T]\times\Omega\to U\text{的函数，且是}B\otimes F_T/B(U)\ \text{可测，同时满足}\int_0^T E\|Z(s)\|^p ds<\infty\},$$

定义 5.1([95，定义 4.1])称两个过程 $Z^1(t),Z^2(t)\in L_p^T$ 为 $dt\otimes P$ 等价的，如果对所有 $(t,\omega)\in\Gamma$ 有 $Z^1(t)=Z^2(t)$，其中 $\Gamma\in B([0,T])\otimes F_T$ 而且满足 $dt\otimes P(\Gamma^c)=0$。我们用 L_p^T 来表示 $dt\otimes P$ 等价类构成的集合，从而 L_p^T 为一个 Banach 空间并有以下模

$$\|Z(t,\omega)\|_{U,T,p}:=(\int_0^T E[\|Z(s,\omega)\|^p]ds)^{1/p}.$$

由 $Z^1(t,\omega),Z^2(t,\omega)$ 的等价性，又因为 $Z_t^1(s,\omega),Z_t^2(s,\omega)\in C([-r,0],L_p^T)$，这样 $Z_t^1(s\omega)$ 和 $Z_t^2(s\omega)$ 也同样是等价的，可得对函数 $Z_t(s\omega)$ 关于 $dt\otimes P$ 等价类构成的集合 $L_{p,c}^T$ 为一个 Banach 空间，并且模为

$$\|Z(t,\omega)\|_{U,c,t,p}:=(\int_0^t\sup_{-h\le\delta\le 0}E[\|Z_s(\delta,\omega)\|^p]ds)^{1/p}.$$

定义 5.2 概率空间 (Ω,F,P) 上的随机过程 $\{X(t),t\ge t_0\}$ 称为方程(5.1.1)的一个适度解，如果：

1.对任意 $t\ge 0,X(t)$ 是 F_t 适应的;

2. $X(t)\in E$ 在 $t\ge t_0$ 上几乎处处有 cádlág 轨道，对任意的 $t\ge t_0$ 有

$$P\{\omega:\int_0^t E\|X(s,\omega)\|^p ds<\infty\}=1$$

且满足方程:

$$X(t)=S(t)\varphi+\int_0^t S(t-s)f(s,X_{s-})ds+\int_0^t\int_\Lambda S(t-s)g(s,X_{s-},z)\tilde N(ds,dz).\quad(5.1.2)$$

由文献[21]中命题 4.15 和文[84,95]中关于 Poisson 随机测度积分的定义及性质，容易得到下面引理。

引理 5.1.3. 对任一给定的 F-适应的可料过程 $\Phi(t):R^+\times\Omega\longrightarrow L(Z,E),t\ge t_0$，如果 $\Phi(t)k\in E_\alpha,t\ge t_0$，对任意的 $k\in Z$，$\int_0^t\int_\Lambda E|\Phi(t)|_{L(\Lambda,E)}^p\nu(du)dt<\infty$ 和

$\int_{t_0}^{t}\int_{\Lambda} E\,|\,A^{\alpha}\Phi(t)\,|_{L(\Lambda,E)}^{p}\,\nu(du)dt<\infty$， 那么

$$A^{\alpha}\int_{t_0}^{t}\int_{\Lambda}\Phi(s)\tilde{N}(ds,dz)=\int_{t_0}^{t}\int_{\Lambda}A^{\alpha}\Phi(s)\tilde{N}(ds,dz).$$

5.2 Poisson 补偿随机测度驱动的随机时滞微分方程解的存在唯一性

令 $MC_{\alpha}(t,p),1\le p\le 2$ 表示出所有属于 $L^{p}(\Omega,C_{\alpha})$ 且 F_t-可测的函数所构成的空间，其中模为 $E\|\psi\|_{C_{\alpha}}^{p}<\infty$。 在这里我们针对方程(5.1.1)中的算子 $-A$ 给出假设:

假设 B:

1.$-A$ 是 U 空间上的解析半群 $\{S(t),t\ge 0\}$ 的无穷小生成元;

2.存在 $M\ge 0$ 和实数 $a>0$ 使得对任意 $h\in U$ 和 $t\ge 0$ 有 $\|S(t)h\|\le Me^{-at}\|h\|$;

3. A^{α} 满足 $\|A^{\alpha}S(t)h\|\le M_{\alpha}e^{-at}t^{-\alpha}\|h\|,t>0,$ 对任一 $h\in U$，其中 $M_{\alpha}\ge 1$;

4.对 $h\in D(A^{\alpha})$ 有 $\|S(t)h-h\|\le N_{\alpha}t^{\alpha}\|A^{\alpha}h\|$，其中 $N_{\alpha}\ge 1$。

函数 f 和 g 满足以下 Lipschitz 条件:

假设 C: 对任意的 $x,y\in C_{\alpha}$ 和 $t_0\le t\le T$，存在常数 C_1,C_2 和 C_3 使得

$$\|f(x,t)-f(y,t)\|^{p}\le C_1\|x-y\|_{C_{\alpha}}^{p};$$
$$\int_{Z}\|g(t,x,z)-g(t,y,z)\|^{p}\,\nu(dz)\le C_2\|x-y\|_{C_{\alpha}}^{p};$$
$$\|f(x,t)\|^{p}+\int_{Z}\|g(t,x,z)\|^{p}\,\nu(dz)\le C_3(1+\|x\|_{C_{\alpha}}^{p}).$$

定理 5.2.1. 令 $\alpha\in(0,1]$，$0<T<\infty$ 和 $\Lambda\in B(U\setminus\{0\})$，如果以上的假设 B 和假 C 对于 $p=1$ 满足，那么对任何初值 $\varphi\in MC_{\alpha}(t_0,1)$，在 $[t_0,T]$ 上方程(5.1.1)存在唯一的适度解， 也就是存在唯一的过程 $X(t)\in L_{1,c}^{T}$ 使得方程(5.1.2)成立。

为了证明定理，这里设 $T>t_0$ 为一个在证明中可以给出并确定的时间。$L_{p,c}^{T}$ 是前面定义的空间。引入一个 $L_{p,c}^{T}$ 上的映射 Φ:

$$\begin{cases}(\Phi Y)(t)=S(t-t_0)A^{\alpha}\varphi(0)+\int_0^t A^{\alpha}S(t-s)f(s,A^{-\alpha}Y_s)ds \\ \qquad\qquad +\int_0^t\int_Z A^{\alpha}S(t-s)g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\tilde{N}(dz,ds), \qquad T\geq t\geq t_0; \\ (\Phi Y)(t)=A^{\alpha}\varphi(t), \qquad 0\geq t\geq -h,\end{cases} \tag{5.2.3}$$

和模

$$E\|X_t\|_c^p:=E\{\sup_{-h\leq s\leq 0}\|X(t+s)\|^p\}.$$

下面我们分步来证明定理 (5.2.1)。

证明　第一步，证明映射 Φ 在 $L_{1,c}^T$ 上有 $\Phi(L_{1,c}^T)\subset L_{1,c}^T$，也即如果 $(Y_t(s,\omega))_{t\in[t_0,T]}\in L_{1,c}^T$，那么 $(\Phi Y_t(s,\omega))_{t\in[t_0,T]}\in L_{1,c}^T$。

首先，证明方程(5.2.3)中的积分都是有定义的。由假设B和假设C，可以得

$$\begin{aligned}&\int_0^T E\|A^{\alpha}S(T-s)f(s,A^{-\alpha}Y_s)\|ds \\ &\leq\int_0^T e^{-a(T-s)}(t-s)^{-\alpha}E\|f(s,A^{-\alpha}Y_s)\|ds \\ &\leq\sup_{t_0\leq s\leq T}(e^{-a(T-s)}(T-s)^{-\alpha})\int_0^T E\|f(s,A^{-\alpha}Y_s)\|ds \\ &\leq K_1(T,t_0)C_3(T+\|Y_s\|_{U,c,T,1}),\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_Z E\|A^{\alpha}S(T-s)g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\|\nu(dz)ds \\ &\leq\int_0^T\int_Z e^{-a(T-s)}(T-s)^{-\alpha}E\|g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\|\nu(dz)ds \\ &\leq\sup_{t_0\leq s\leq T}(e^{-a(T-s)}(T-s)^{-\alpha})\int_0^T\int_Z E\|g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\|\nu(dz)ds \\ &\leq K_2(T,t_0)C_3(T+\|Y_s\|_{U,c,T,1}),\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

其中 $K_1(T,t_0),K_2(T,t_0)$ 为与 T 和 t_0 有关的常数。

下面我们证明 $(\Phi Y_t(s,\omega))_{t\in[t_0,T]}\in L_{1,c}^T$。由(5.2.4)和(5.2.5)可以得

$$\begin{aligned}&\int_0^T E\|(\Phi Y)_t\|_C dt=\int_0^T E\sup_{-h\leq\theta\leq 0}\|(\Phi Y)(t+\theta)\|dt \\ &\leq\int_0^T E\sup_{-h\leq\theta\leq 0}\|S(t+\theta)A^{\alpha}\varphi(0)\|dt \\ &\quad+\int_0^T E\sup_{-h\leq\theta\leq 0}\|\int_0^{t+\theta}A^{\alpha}S(t+\theta-s)f(s,A^{-\alpha}Y_s)ds\|dt \\ &\quad+\int_0^T E\sup_{-h\leq\theta\leq 0}\|\int_0^{t+\theta}\int_Z A^{\alpha}S(t+\theta-s)g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\tilde{N}(dz,ds)\|dt \\ &=I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

对上式中的 I_1、I_2 和 I_3，由假设B、假设C、引理(5.1.11)和Hölder不等式可得

$$I_1 \le MTE \| \varphi \|_{C_\alpha},$$

$$\begin{aligned} I_2 &\le M_\alpha \int_0^T E \sup_{-h\le\theta\le 0} \left(\int_0^{t+\theta} e^{-a(t+\theta-s)} (t+\theta-s)^{-\alpha} \| f(s, A^{-\alpha} Y_s) \| ds \right) dt \\ &\le M_\alpha \int_0^T \{ \sup_{t_0 \le t \le T} [(t-t_0)^{-\alpha} e^{-a(t-t_0)}] \sup_{-h\le\theta\le 0} \int_0^{t+\theta} E \| f(s, A^{-\alpha} Y_s) \| ds \} dt \\ &\le C_3 K_3(T, t_0) M_\alpha (T + \| Y \|_{U,c,t,1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &\le M_\alpha \int_0^T E \sup_{-h\le\theta\le 0} \left(\int_0^{t+\theta} \int_\Lambda e^{-a(t+\theta-s)} (t+\theta-s)^{-\alpha} \| g(s, A^{-\alpha} Y_s, z) \| \nu(dz) ds \right) dt \\ &\le M_\alpha \int_0^T \{ \sup_{t_0 \le t \le T} [(t-t_0)^{(-\alpha)} e^{-a(t-t_0)}] \sup_{-h\le\theta\le 0} (\int_0^{t+\theta} \int_\Lambda E \| g(s, A^{-\alpha} Y_s, z) \| \nu(dz) ds \} dt \\ &\le K_4(T, t_0) C_3 M_\alpha (T + \| Y \|_{U,c,t,1}); \end{aligned}$$

将上面结果代入(5.2.6)得

$$\begin{aligned} \| \Phi Y \|_{U,c,t,1} &\le (K_3(T,t_0) + K_4(T,t_0)) C_3 M_\alpha (T + \| Y \|_{U,c,t,1}) \\ &\le \infty. \end{aligned}$$

第二步，证明算子Φ是$L_{1,c}^T$ 上的压缩算子。

令$X, Y \in L_{1,c}^T$，则有

$$\begin{aligned} \int_0^T E \| (\Phi X)_t - (\Phi Y)_t \|_C \, dt &\le \int_0^T E \sup_{-h\le\theta\le 0} \| \int_0^{t+\theta} A^\alpha S(t+\theta-s)(f(s, A^{-\alpha} X_s) \\ &\quad - f(s, A^{-\alpha} Y_s)) ds \| dt \\ &\quad + \int_0^T E \sup_{-h\le\theta\le 0} \left\| \int_0^{t+\theta} \int_Z A^\alpha S(t+\theta-s)(g(s, A^{-\alpha} X_s, z) \right. \\ &\quad \left. - g(s, A^{-\alpha} Y_s, z)) \tilde{N}(dz, ds) \right\| dt \\ &= I_4 + I_5. \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

对式中的I_4, I_5，由假设 B，假设 C，引理(1)和 Hölder 不等式，类似于I_2, I_3可得

$$\begin{aligned} I_4 &\le M_\alpha \int_0^T E \sup_{-h\le\theta\le 0} \left(\int_0^{t+\theta} (e^{-a(t+\theta-s)} (t+\theta-s)^{-\alpha} \| f(s, A^{-\alpha} X_s) \right. \\ &\quad \left. - f(s, A^{-\alpha} Y_s) \| ds \right) dt \\ &\le K_3(T, t_0) C_2 M_\alpha \| X - Y \|_{U,c,t,1}, \\ I_5 &\le M_\alpha \int_0^T \sup_{-h\le\theta\le 0} \left(\int_0^{t+\theta} \int_\Lambda e^{-a(t+\theta-s)} (t+\theta-s)^{-\alpha} E \| g(s, A^{-\alpha} X_s, z) \right. \\ &\quad \left. - g(s, A^{-\alpha} Y_s, z) \| \nu(dz) ds \right) dt \\ &\le K_4(T, t_0) C_2 M_\alpha \| X - Y \|_{U,c,t,1}; \end{aligned}$$

将I_4、I_5代入(5.2.7)有

$$\begin{aligned}\|\Phi Y-\Phi Y\|_{U,c,t,1} &\le (K_3(T,t_0)+K_4(T,t_0))C_2M_\alpha\|X-Y\|_{U,c,t,1} \\ &= B(T)\|X-Y\|_{U,c,t,1}.\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

因此，选择适当的$T>t_0$，$T-t_0>0$足够小使$B(T)\in(0,1)$，对任意的$X,Y\in L_{1,c}^T$都有(5.2.8)成立，算子Φ是压缩的。由 Banach 不动点定理，可知算子Φ存在唯一不动点$u\in L_{1,c}^T$使得$\Phi u=u$，令$X(t)=A^\alpha u(t)$。则可得$X(t)$是唯一满足方程(5.1.1)的解，即$X(t)$为方程(5.1.1)的适度解。 从而定理(5.2.1)得证。

定理 5.2.2. 令$\alpha\in(0,1)$。U为M型2次可分 Banach 空间。 $0<T<\infty$和$\Lambda\in B(U\setminus\{0\})$。如果以上的假设 B 和假设 C 对于$p=2$满足，那么对任何初值$\varphi\in MC_\alpha(t_0,2)$，在$[t_0,T]$上方程(5.1.1)存在唯一的适度解，也就是存在唯一的过程$X(t)\in L_{2,c}^T$使得方程(5.1.2)成立。

证 明　第一步，证明映射Φ在$L_{2,c}^T$上有$\Phi(L_{2,c}^T)\subset L_{2,c}^T$，也即如果$(Y_t(s,\omega))_{t\in[t_0,T]}\in L_{2,c}^T$，那么$(\Phi Y_t(s,\omega))_{t\in[t_0,T]}\in L_{2,c}^T$。

首先，证明方程(5.2.3)中的积分对$p=2$都是有定义的。由假设B和假设C，有

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^T E\|A^\alpha S(T-s)f(s,A^{-\alpha}Y_s)\|^2 ds &\le \int_{t_0}^T ((e^{-a(T-s)}(t-s)^{-\alpha}E\|f(s,A^{-\alpha}Y_s)\|)^2 ds \\ &\le \int_{t_0}^T (e^{-2a(T-s)}(T-s)^{-2\alpha})ds\int_{t_0}^T E\|f(s,A^{-\alpha}Y_s)\|^2 ds \\ &\le (T-t_0)^{\beta_0}C_3(T+\int_{t_0}^T \|Y(s)\|_C^2 ds),\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^T\int_Z E\|A^\alpha S(T-s)g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\|\nu(dz)ds \\ &\le \int_{t_0}^T\int_Z (e^{-a(T-s)}(T-s)^{-\alpha}E\|g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\|)^2\nu(dz)ds \\ &\le \int_{t_0}^T (e^{-2a(T-s)}(T-s)^{-2\alpha})ds\int_{t_0}^T\int_Z E\|g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\|^2\nu(dz)ds \\ &\le (T-t_0)^{\beta_0}C_3(T+\int_{t_0}^T E\|Y(s)\|_C^2 ds),\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

其中β_0为与a 和α有关的常数。

同样可以证明$(\Phi Y_t(s,\omega))_{t\in[t_0,T]}\in L_{2,c}^T$，

$$
\begin{aligned}
\int_0^T E\|(\Phi Y)_t\|_C^2\,dt &= \int_0^T E\sup_{-h\le\theta\le 0}\|(\Phi Y)(t+\theta)\|^2\,dt\\
&\le \int_0^T E\sup_{-h\le\theta\le 0}\|S(t+\theta)A^{\alpha}\varphi(0)\|^2\,dt\\
&\quad+\int_0^T E\sup_{-h\le\theta\le 0}\|\int_0^{t+\theta}A^{\alpha}S(t+\theta-s)f(s,A^{-\alpha}Y_s)ds\|^2\,dt\\
&\quad+\int_0^T E\sup_{-h\le\theta\le 0}\|\int_0^{t+\theta}\int_Z A^{\alpha}S(t+\theta-s)g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\tilde N(dz,ds)\|^2\,dt\\
&=I_6+I_7+I_8
\end{aligned}
\tag{5.2.11}
$$

对I_6、I_7和I_8，由假设 B、假设 C 和 Hölder 不等式可得

$$
\begin{aligned}
I_6 &\le MTE\|\varphi\|_{C_\alpha}^2,\\
I_7 &\le M_\alpha\int_0^T E\sup_{-h\le\theta\le 0}\Big(\int_0^{t+\theta}(e^{-a(t+\theta-s)}(t+\theta-s)^{-\alpha}\|f(s,A^{-\alpha}Y_s)\|ds\Big)^2dt,\\
&\le M_\alpha(\Gamma(1-2\alpha)(aq)^{2\alpha-1})\int_0^T\Big(\sup_{-h\le\theta\le 0}\Big(\int_0^{t+\theta}E\|f(s,A^{-\alpha}Y_s)\|ds\Big)^2dt\\
&\le M_\alpha(T-t_0)(\Gamma(1-2\alpha)(aq)^{2\alpha-1})C_3(T+\|Y\|^2_{U,c,t,2}),\\
I_8 &\le M_\alpha\int_0^T\Big(\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda e^{-a(t+\theta-s)}(t+\theta-s)^{-\alpha}\\
&\qquad\times E\|g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\|\nu(dz)ds\Big)^2dt\\
&\le M_\alpha(\Gamma(1-2\alpha)(aq)^{2\alpha-1})\int_0^T\int_\Lambda E\|g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\|^2\nu(dz)ds)dt\\
&\le M_\alpha(T-t_0)(\Gamma(1-2\alpha)(aq)^{2\alpha-1})C_3(T+\|Y\|^2_{U,c,t,2});
\end{aligned}
$$

将上面结果代入(5.2.11)得

$$
\begin{aligned}
\|\Phi Y\|^2_{U,c,t,2} &\le M_\alpha(T-t_0)(\Gamma(1-2\alpha)(aq)^{2\alpha-1})C_3(T+\|Y\|^2_{U,c,t,2})\\
&\le \infty.
\end{aligned}
$$

第二步，证明算子Φ是$L^T_{2,c}$ 上的压缩算子。令$X,Y\in L^T_{2,c}$，则有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T E\|(\Phi X)_t-(\Phi Y)_t\|_C^2\,dt\\
&\le \int_0^T E\|\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}A^{\alpha}S(t+\theta-s)(f(s,A^{-\alpha}X_s)-f(s,A^{-\alpha}Y_s)ds)\|^2\,dt\\
&\quad+\int_0^T E\|\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\int_Z A^{\alpha}S(t+\theta-s)(g(s,A^{-\alpha}X_s,z)\\
&\quad-g(s,A^{-\alpha}Y_s,z))\tilde N(dz,ds)\|^2\,dt\\
&=I_9+I_{10}.
\end{aligned}
\tag{5.2.12}
$$

对I_9和I_{10}同样由假设 B、假设 C 和 Hölder 不等式可得

$$I_9 \le M_\alpha \int_0^T E(\sup_{-h\le\theta\le0}\int_0^{t+\theta}(e^{-a(t+\theta-s)}(t+\theta-s)^{-\alpha}\|f(s,A^{-\alpha}X_s)$$
$$-f(s,A^{-\alpha}Y_s)\|ds)^2 dt$$
$$\le M_\alpha(T-t_0)(\Gamma(1-2\alpha)(aq)^{2\alpha-1})C_2\|X-Y\|^2_{U,c,t,2},$$
$$I_{10} \le K_2^2 M_\alpha \int_0^T(\sup_{-h\le\theta\le0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda e^{-a(t+\theta-s)}(t+\theta-s)^{-\alpha}E\|g(s,A^{-\alpha}X_s,z)$$
$$-g(s,A^{-\alpha}Y_s,z)\|\nu(dz)ds)^2 dt$$
$$\le K_2^2 M_\alpha(T-t_0)(\Gamma(1-2\alpha)(aq)^{2\alpha-1})C_2 M_\alpha\|X-Y\|^2_{U,c,t,2};$$

将I_9、I_{10}代入(5.2.12)有

$$\begin{aligned}\|\Phi Y-\Phi Y\|_{U,c,t,2} &\le [(1+K_2^2)M_\alpha(T-t_0)(\Gamma(1-2\alpha)(aq)^{2\alpha-1})\\ &\quad\times C_2M_\alpha]^{1/2}\|X-Y\|_{U,c,t,2} \\ &= M(T,t_0)\|X-Y\|_{U,c,t,2}.\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

因此，选择适当的$T>t_0$使得$T-t_0>0$足够小可以使得$M(T,t_0)\in(0,1)$，对任意的$X,Y\in L_{2,c}^T$都有(5.2.13)成立，也即算子Φ是压缩的。由 Banach 不动点定理，算子Φ在空间$L_{2,c}^T$存在唯一不动点u，使得$\Phi u=u$。令$X(t)=A^\alpha u(t)$，则可得$X(t)$是满足方程(5.1.2)的唯一解，即为方程(5.1.1)的适度解。从而定理得证。

上面主要研究了当$p=1$和$p=2$时们M型p次空间中随机时滞偏微分方程的解的存在唯一性，而对一般的$1<p<2$时，定理的结论不一定成立。由于$1<p<2$时，M型p次空间都不是Hilbert空间，从而结果的研究就要复杂得多。

第六章　Poisson 随机测度驱动的随机时滞偏微分方程鞅解的存在唯一性

6.1 引言

本章中，我们主要讨论 Poisson 随机测度驱动的随机时滞偏微分方程适度解在 Banach 空间的存在唯一性。

众所周知，Poisson 随机测度驱动的抛物型随机偏微分方程最初可在[98]为 Walsh 所介绍和讨论，在文献[98]中 Walsh 以电报方程做为例子对这类方程做了研究。 Hilbert 空间中的 Lévy 过程驱动的随机发展方程和随机偏微分方程已经有 很多学者对此进行了研究，也得到了很多相应的结果，如 Albeverio、 Wu 和 Zhang [59]， Rockner 和 Zhang [74]， Mytnik [99] 等以及文后参考文献中所列的文献。 Brzezniak 分别在 1995 和 1997 对 Banach 空间中的 Wiener 过程驱动的随机偏微分方程的理论进行了 研究[100,83]。在文献[84]中，作者研究了 p 次 M 型的 Banach 空间中 Poisson 随机 测度驱动的随机偏微分方程，得到了解的存在唯一性以及相关正则性；同样在[85]中，作者 又对 p 次 M 型的 Banach 空间中 Poisson 随机测度驱动的随机偏微分方程当方程的系数不满足 Lipschitz 条件时进行了研究,得到了解的存在唯一性结论。

对有限时滞的随机时滞常微分方程已经有很多学者进行研究，如：[78]、[93]以及[36]的参考文献。

另一方面，对于 Poisson 随机测度驱动的带有限时滞的随机时滞偏微分方程研究还是不多，但是近年来得到很多学者的重视，如 Taniguchi、 Liu 和 Truman [97]以及 Luo 和 Liu [101]等。

在本章中，利用半群方法，对 p 次 M 型 Banach 空间中随机测度驱动的带有限时滞随机时滞偏微分方程解的存在唯一性和正则性进行研究。将文[84,85]中的结论扩展到有限时滞的随机偏微分方程。

6.2 预备知识

在这一节我们给出将要用到的相关知识和结论，这里只是简单介绍，详细的定义和一些结论 的证明可以参考相应的文献，如 Hausenblas 的[84,85]。

令(Ω,F,P)为一个完备的概率空间，$\{F_t\}_{t\geq 0}$为一个增的F中的子σ代数，U为一个 Banach 空间，考虑如下方程

$$\begin{aligned} du(t) &= [-Au(t)+f(u(t+s))]dt + \int_\Lambda g(z,u(t+s))\tilde{N}(dt,dz), \\ & \qquad t\geq t_0, -h\leq s\leq 0 \qquad (6.2.1) \\ u(t_0+v) &= \varphi(v), \qquad v\in[-h,0], \end{aligned}$$

其中φ为F_{t_0}可测的，$-A$为一个稠密闭的线性算子，其生成U上的解析半群为$\{S(t),t\geq 0\}$。

为方便起见，假设半群$S(t)$是有界的，也即是，对$t\geq 0$有$0\in\rho(A)$ ，对算子而言就是$-A$ 是可逆的。这样就有对$0\leq\alpha\leq 1$，A^α是可以定义的，而且A^α为一个闭的线性可逆算子，其定义域为$D(A^\alpha)$，在U中稠密。 A^α的可闭性意味着$D(A^\alpha)$ 的范数为A^α的图范数，为$|u|_\alpha:=|A^\alpha u|$。因此，带图范数的 Banach 空间记为V_α。令Z和U为 Banach 空间，范数分别为 $|\cdot|_Z$和$|\cdot|_U$，U为p次M型的 Banach 空间。令$\Lambda:=Z\setminus\{0\}$， $N(dz,dt):B(Z)\bigotimes B(R^+)\to R^+$为一个$(\Omega,F,P)$上的随机 Poisson 测度，其特征测度为$\nu(dz)\in L(Z)$，补偿子为$\pi(dz,dt)$。则$\tilde{N}(dz,dt):=N(dz,dt)-\pi(dz,dt)$为补偿 Poisson 随机测度。函数$f:X\to V_{-\delta_f}$和$g:X\to L(Z,V_{-\delta_g})$，这里的空间$X,V_{-\delta_f}$和$V_{-\delta_g}$将在本章的第三节给出详细定义。

定义 6.1.如果系统$(\Omega,F,P,N,\{F_t\}_{t\geq 0},\{u(t)\}_{t\geq 0})$使得$\{u(t)\}_{t\geq 0}$为一个 Banach 空间中适应的 cádiág 过程满足以下的积分方程，

$$
\begin{aligned}
u(t) &= S(t-t_0)\varphi(0)+\int_0^t S(t-v)f(u(v+s))dv \\
&\quad +\int_0^t\int_\Lambda S(t-v)g(u(v+s),z)\tilde{N}(dz,dv) \qquad (6.2.2)\\
&\qquad\qquad t\ge t_0,-h\le s\le 0,\\
u(t_0-s) &= \varphi(t_0-s), \qquad\qquad t_0-h\le s\le t_0,
\end{aligned}
$$

则我们称 $(\Omega,F,P,N,\{F_t\}_{t\ge0},\{u(t)\}_{t\ge0})$ 为方程(6.2.1)的一个鞅解。

注 1： 令 $\{Y(t)\}_{t\ge0}$ 为 Banach 空间 Z 中的加性过程，$\tilde{N}(dz,dt)$ 为由其产生的一个过程。$\{Y(t)\}_{t\ge0}$ 为一个 Lévy 过程，当且仅当 $\pi(dz,dt)=dt\nu(dz)$，同时称 $\nu(dz)$ 为 $\{Y(t)\}_{t\ge0}$ 的 Lévy 测度。

注 2： (参看[84,85]) 令 Z 为一个可分的 Banach 空间，Z^* 为其拓扑对偶。令 $B(Z)$ 为 Z 的一个 Borel-σ-代数。一个 Borel-测度 $\nu:B(Z)\to R^+$ 称为 Lévy 测度如果它是 σ-有限的,而且有 $\nu(\{0\})=0$ 和函数

$$Z^*\ni a\mapsto \exp\left(\int_J (e^{i<x,a>}-1)\nu(dx)\right)\in C$$

为 Z 上的 Radon 测度的一个特征函数。如果 Lévy 测度 ν 满足对所有的 $A\in B(Z)$ 有 $\nu(A)=\nu(-A)$，则称为对称 Lévy 测度。

定义 6.2(参考 [84,85,100]) 令 $1\le p\le 2$,一个 Banach 空间 U 为一个 p 次 M 型的,如果存在常数 $C=C(U,P)$ 使得对任意的 U-值离散鞅 $(M_0,M_1,M_2,\cdots)$ 其中 $M_0=0$,有下面的不等式成立

$$\sup_{n\ge1}E|M_n|^p\le C\sum_{n\ge1}E|M_n-M_{n-1}|^p \qquad (6.2.3)$$

注 3： 在 [84,85]中,已经有了关于 Poisson 随机测度的相应结论，若 $1\le p\le 2$，U 和 Z 为可分的 Banach 空间，而且 U 为 p 次 M 型的，则存在一个常数 $C<\infty$ 使得对每一个特征测度为 $\nu\in L(Z)$ 的补偿 Poisson 随机测度 $\tilde{N}(dt,dz)$ 和线性函数 $H:Z\to U$ 都有

$$E\left|\int_0^t\int_\Lambda Hz\tilde{N}(dz,ds)\right|^p\le Ct\int_\Lambda |Hz|^p\,\nu(dz). \qquad (6.2.4)$$

还将用的下面的定理(参考[84,85])。

定理 6.2.1. (参看 [84,85，命题 2.2]) 令 $1\le p\le 2$，U 和 Z 为可分的 Banach 空间，U 为 p 次 M 型的。对所有 $L_p(\nu)$ 中函数 $h:\Omega\times R^+\times Z\to U$ 有

$$E\sup_{0<s\le t}|\int_0^s\int_\Lambda h(\sigma,z)\tilde{N}(dz,d\sigma)|^r\le CE(\int_0^t\int_\Lambda|h(s,z)|^p N(dz,ds))^{r/p},0<r<\infty, \tag{6.2.5}$$

和

$$E\sup_{0<s\le t}|\int_0^s\int_\Lambda h(\sigma,z)\tilde{N}(dz,d\sigma)|^r\le C(\int_0^t\int_\Lambda E|h(s,z)|^p \nu(dz,ds))^{r/p},0<r\le p, \tag{6.2.6}$$

其中

$$L_p(\nu)=\{h:\Omega\times R^+\to L(Z,U),h\text{可料caglad 过程，}$$
$$\text{满足}\int_0^t\int_\Lambda E|h(\omega,s,z)|^p\nu(dz)ds<\infty\}$$

范数为

$$|h|^p_{L(\nu)}:=\int_0^t\int_\Lambda E|h(\omega,s,z)|^p\nu(dz)ds.$$

注 4：事实上，在[85] 中的 Proposition 2.2 的假设条件下，有以下的结果：令 $h\in L(\nu)$ 和 $n\in N$，同时假设

$$E(\int_0^t\int_\Lambda|h(\omega,s,z)|^p\nu(dz)ds)^{q/p}<\infty,$$

和

$$\int_0^t\int_\Lambda E|h(\omega,s,z)|^q\nu(dz)ds<\infty,$$

则存在常数 $C<\infty$ 使得

$$E\sup_{0<s\le t}|\int_0^s\int_\Lambda h(\sigma,z)\tilde{N}(dz,d\sigma)|^q\le C\sum_{l=1}^n(\int_0^t\int_\Lambda E|h(s,z)|^{p^l}\nu(dz)ds)^{p^{n-l}}. \tag{6.2.7}$$

因为方程为随机时滞微分方程(6.2.1)，这里需要在研究随机时滞微分方程常用一些定义，对给定的 $h>0$ 定义分段过程 $\{u_t\}_{t\ge 0}$，$u_t(s):=u(t+s),s\in[-h,0]$，则分段过程 u_t 对时间 t 固定时为一个函数 $u_t:[-h,0]\to U$。对 $\{u_t\}_{t\ge0}$，给定一个范数为 $\|u_t(s)\|^p_C:=\sup_{-h\le s\le 0}|u_t(s)|^p$，对 $\delta>0$，$\|u_t(s)\|^p_{C,\delta}:=\sup_{-h\le s\le 0}|A^\delta u_t(s)|^p$ 和 $\|u_t(s)\|^p_{C,-\delta}:=\sup_{-h\le s\le 0}|u_t(s)|^p_\delta$，其中范数 $|\cdot|_\delta$ 将在第三节中详细介绍。令空间

$X:=C([-h,0];U)$ 及其范数 $\|u\|_C^p:=\sup_{-h\le s\le 0}|u|^p$，空间 $V_{-\delta}^C:=\{u:u_t\in X,使得\|u_t(s)\|_{C,-\delta}^p<\infty\}$。

6.3 主要结果

对 $\delta>0$,空间 $V_\delta:=D(A^\delta)$ 和空间的范数为$|\cdot|_\delta:=|A^\delta\cdot|$，对$n\in N$，令$V_{-n}$为在模$|\cdot|_{-n}:=|(-A)^{-n}\cdot|$下空间$E$的完备化空间。如果$\delta<0$使得$-\delta=-n+\beta,V_\delta$表示$V_{-n}$中算子$A$的分数次幂的定义域,其中幂为$\beta\in[0,1)$,模为 $|\cdot|_\delta=|A^\beta\cdot|_{-n}$(具体可以看 Pazy[92]) 对$r$满足 $p\le r<\infty$，令

$$V_{r,-\rho}=\{u:\Omega\to V_{-\rho}\text{such that}E|u|_{-\rho}^r<\infty\}$$

模为$\|u\|_{V_{r,-\rho}}:=(E|u|_{-\rho}^r)^{1/r}$。

对$p\le q<\infty$，令$L^q([t_0,T];X)$为由所有 Bochner 可积函数$\int_{t_0}^T\|u\|_C^q\,ds<\infty$构成的空间。模为

$$\|u\|_{L^q}:=(\int_{t_0}^T\|u\|_C^q\,ds)^{1/q}$$

和$L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$为所有的随机过程构成空间，使得 $\phi\in L^q([t_0,T];X)$ a.s.。另，对 Banach 空间X，令$D([t_0,T];X)$为所有适应的 cádlág 函数$u:[t_0,T]\to X$构成的 Skorohod 空间,其上的拓扑为 Skorohod 拓扑。

假设:

(H.0)对任意$\alpha>0$，φ是F_{t_0}-可测，而且存在$R>0$ 使得

$$P(\|\varphi\|_{C,-\rho}>K)\le RK^{-\alpha},K\ge 1;$$

(H.1)令δ_f为一个常数而且$f:X\to V_{-\delta_f}$，存在 常数$C_f<\infty$ 常数

$$|f(x)-f(y)|_{-\delta_f}\le C_f\|x-y\|_C\qquad x,y\in X;$$

(H.2)令δ_g为一个常数而且$g:X\to L(Z,V_{-\delta_g})$，存在常数$C_g<\infty$使得

$$\int_\Lambda|g(x,z)-g(y,z)|_{-\delta_g}^{p^l}\,\nu(dz)\le C_g\|x-y\|_C^{p^l}\qquad x,y\in X,l=1,\cdots,n.$$

注 5: 在文 [85]中，Hansenblas 研究函数 $f(x)$ 和 $g(x,z)$ 不满足

Lipschtiz 条件，而且 $f(x),g(z,x)$ 为关于 x 为 Hölder 连续，也就是，对 $0<r_f,r_g<1$

$$|f(x)-f(y)|_{-\delta_f}\le C_f|x-y|^{r_f}\quad x,y\in X,$$

和

$$\int_\Lambda|g(x,z)-g(y,z)|_{-\delta_g}^{p_l}\,\nu(dz)\le C_g|x-y|^{r_g p_l}\quad x,y\in X,l=1,\cdots,n.$$

定理 6.3.1. 令$1<p\le 2$和X和Z为可分Banach空间。其中U是p次 M 型。令$N(dz,dt):B(Z)\hat{\times}B(R)\to R^+$为Poisson 随机测度，其补偿子$\pi(dz,dt)$ 以及特征测度为$\nu:B(Z)\to R^+$ 满足

$$\int_\Lambda|z|^p\,\nu(dz)<\infty.$$

令$q<\infty$，假设非负的常数δ_f、δ_g、δ和γ满足下面条件：

1. $\delta_g q<1$ 和 $\delta_f<1$；

2. $(\delta_g-\rho)p<1-\frac{1}{q}$ 和 $\delta_f-\rho<1-\frac{1}{q}$;

3. $\rho<\frac{1}{q}$;

4. $\delta>\max(\frac{1}{q}+\delta_g,\delta_f-1+\frac{1}{q},\frac{1}{q})$.

若还有(H.1)和(H.2)满足，则有以下结论：
(1)如果初值满足(H.0),对$\alpha\ge 1$则方程(6.2.1) 有

$$L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))\cap L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$$

中鞅解u,而且存在常数$C<\infty$ 使得

$$P(\|u\|_{L^q}\ge K)\le CK^{-\alpha},\qquad K\ge 1.$$

(2) 如果初值满足$E\|\varphi\|_{C,-\rho}^q<\infty$，则方程(6.2.1)有

$$L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))\cap L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$$

中的鞅解u满足$E\|u\|_{L^q}^q<C$和$\sup_{t_0\le t\le T} E\|u\|_{C,-\rho}^p\le C$。

证明定理 6.3.1 之前，介绍一些概念。令$L_D^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$为所有$u\in L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$的集合使得$u$是一个$D([t_0,T];V_{-\delta}^C)$-值随机变量和$u:\Omega\times[t_0,T]\to V_{-\delta}^C$为适应的，而且$\varphi\in L^0(\Omega;V_{-\rho})$为$F_{t_0}$-可测，定义算子

$$K_\varphi: L_D^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))\to L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$$

由下面的式子定义的，

$$\begin{aligned}(K_\varphi u)(t) &= S(t)\varphi+\int_0^t S(t-s)f(u_{s-})ds\\ &\quad+\int_0^t\int_\Lambda S(t-s)g(z,u_{s-})\tilde N(dz,ds) \qquad (6..3.1)\\ &\quad t\in[t_0,T],u\in L_D^0(\Omega;L^q([t_0,T];X)).\end{aligned}$$

对 $\gamma\in R$，$P\le r<\infty$和$r\le q<\infty$,令

$$\begin{aligned}V_{r,q,\gamma}(T) &:= \{u:\Omega\times[t_0,T]\to X,\text{满足}\\ &\quad\int_0^T(E\|u_t\|_{C,\gamma}^r)^{q/r}ds<\infty\},\end{aligned}$$

模为

$$|||u|||_{r,q,\gamma}=(\int_0^T(E\|u_s\|_{C,\gamma}^r)^{q/r}ds)^{1/q},\qquad u\in V_{r,q,,}(T),$$

对$r=\infty$

$$\begin{aligned}V_{\infty,q,\gamma}(T) &:= \{u:\Omega\times[t_0,T]\to X,\text{满足}\\ &\quad\sup_{t_0\le s\le T}(E\|u_s\|_{C,\gamma}^q)^{1/q}<\infty\},\end{aligned}$$

模为

$$|||u|||_{\infty,q,\gamma}=(\sup_{t_0\le s\le T}E\|u_s\|_{C,\gamma}^q)^{1/q},\qquad u\in V_{\infty,q,\gamma}(T),$$

如果 $\gamma=0$,记$V_{r,q,\gamma}(T)$ 为$V_{r,q}(T)$。若考虑给定区间$[t_1,t_2]$的模，其中$t_0\le t_1\le t_2\le T$,

$$|||u|||_{q,q,[t_1,t_2]}:=(\int_{t_1}^{t_2}E\|u_s\|_C^q\,ds)^{1/q},\qquad u\in V_{q,q,}(T),$$

或者对 $\gamma\in R$有

$$|||u|||_{\infty,q,\gamma,[t_1,t_2]}=\sup_{t_1\le s\le t_2}(E\|u_s\|_{C,\gamma}^q)^{1/q},\qquad u\in V_{\infty,q,\gamma}(T),$$

证明：首先，证明定理 6.3.1 中的(1)。令

$$M(\alpha,T,R) := \{u \in L_D^0(\Omega; L^q([t_0,T];X)), \quad P(\|u\|_{L^q} \geq K) \leq RK^{-\alpha}, K \geq 1\} \quad \alpha > 0, R > 0, T > t_0,$$

和

$$M_0(\alpha,R) := \{\varphi \in L^0(\Omega; V_{-\delta}) \text{满足} \varphi \text{为} F_{t_0} - \text{可测和} P(|\varphi|_{-\rho} \geq K) \leq RK^{-\alpha}, K \geq 1\} \quad \alpha > 0, R > 0.$$

由引理 6.4.3，算子K_φ关于空间$L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$的拓扑为连续的。因为$L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$是完备的，对任意$R>1$，将算子$K_\varphi$定义到$\overline{M(\alpha,T,R)}$上，而且如果$\alpha \geq 1$，集合$\overline{M(\alpha,T,R)}$是$L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$中闭的、凸的非空子集。可以证明对$\alpha$，$q > \alpha \geq 1$，和$\varphi \in M_0(\alpha,R)$，$K_\varphi$映$M_0(\alpha,R)$ 到$\overline{M(\alpha,T,R)}$。

令$R_0, R > 0$为给定常数和$K \geq 1$为任意给定常数，令

$$M = M(K,R) := K\{\frac{R}{2(R+R_0)}\}^{-1/\alpha} \tag{6.3.2}$$

对 $u \in L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$，定义

$$u^M := \begin{cases} u & \text{如果} \|u\|_{L^q} \leq M \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{6.3.3}$$

对$\varphi \in V_{q,-\rho}$

$$\varphi^M := \begin{cases} \varphi & \text{若} \|\varphi\|_{V_{q,-\rho}} \leq M \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{6.3.4}$$

则由 Chebyscheff 不等式得

$$P(\|K_\varphi u\|_{L^q} \geq K) \leq \frac{\|\|K_{\varphi^M} u^M\|\|_{q,q}^q}{K^q} + P(u \neq u^M) + P(\varphi \neq \varphi^M), K \geq 1.$$

由引理 6.3.2，存在常数C_1、$C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q) < \infty$ 使得

$$
\begin{aligned}
P(\| K_\varphi u \|_{L^q} \ge K) \le & \frac{\{C_1(T-t_0)^{(1-q\rho)} \| \varphi^M \|_{V_{q,-\rho}} + C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q) \| u^M \|_{q,q}\}}{K^q} \\
& + P(u \ne u^M) + P(\varphi \ne \varphi^M) \\
\le & \frac{(C_1(T-t_0)^{(1-q\rho)} + C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q))M^q}{K^q} \\
& + P(u \ne u^M) + P(\varphi \ne \varphi^M) \\
\le & \frac{(C_1(T-t_0)^{(1-q\rho)} + C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q))M^q}{K^q} \\
& + RM^{-\alpha} + R_0 M^{-\alpha},
\end{aligned}
$$

如果 R 满足

$$
\frac{(C_1(T-t_0)^{(1-q\rho)} + C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q))M^q}{K^q} \le \frac{R}{2} K^{-\alpha}. \tag{6.3.5}
$$

则由 (6.3.2)可得

$$
P(\| K_\varphi u \|_{L^q} \ge K) \le RK^{-\alpha},
$$

也即 $K_\varphi u \in \overline{M(\alpha,T,R)}$。由引理 6.4.3 和引理 6.4.5，算子 K_φ 在 $\overline{M(\alpha,T,R)}$ 中为连续的。应用 Schauder-Tychonoff 不动点定理，可得存在一个不动点 u^* 使得 $K_\varphi u^* = u^*$。定理的(1)得证。

下面证明定理 6.3.1 的(2)。给定 $T>0$ 和 $p \le q < \infty$。由引理 6.4.2，存在 $\beta > 0$ 和常数 $C_1, C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q) < \infty$ 使得

$$
\begin{aligned}
\||K_\varphi u \||_{q,q} \le & \ C_1(T-t_0)^{(1-q\rho)} \| \varphi \|_{V_{q,-\rho}} + C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q) \|| u \||_{q,q} \\
& \varphi \in V_{q,-\rho}, \quad u \in V^D_{q,q}(T), \quad \||u\||_{q,q} \ge 1.
\end{aligned}
$$

令 $R>1$ 可以使得

$$
\{C_1(T-t_0)^{(1-q\rho)} \| \varphi \|_{V_{q,-\rho}} + C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q) R\} \le R. \tag{6.3.6}
$$

令

$$
M(R,T) := \{u \in L^0(\Omega; L^q([t_0,T]; X)) \cap L^0(\Omega; D([t_0,T]; V^C_{-\rho}))\text{满足} \|| u \||_{q,q} \le R\}.
$$

则，$\overline{M(R,T)}$ 为 $L^0(\Omega; L^q([t_0,T]; X))$ 的一个有界凸闭子集。又 $\| \varphi \|_{V_{q,-\rho}} < \infty$，由引理可得若(6.3.6) 成立，算子 K_φ 在 $\overline{M(R,T)}$ 上为映上的。又由引理 6.4.3 和引

理 6.4.5 可得 K_φ 为 $L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))\cap L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\rho}^C))$ 上是连续紧的，同样由 Schauder- Tychonoff 不动点定理可以证明定理 6.3.1 的(2)。

6.4 几个引理

在这一节中，主要给出上一节用到的几个引理以及引理的证明。令 $V_{q,q,}^D(T)$ 表示所有的 $u\in V_{q,q}(T)$ 的集合，其中 u 为适应的和值落在 $D([t_0,T];V_{-\delta}^C)$ 上的随机变量。令 K_φ 为下面的映射

$$
\begin{aligned}
(K_\varphi u)(t) &= S(t)\varphi(0)+\int_0^t S(t-s)f(u_{s-})ds \\
&\quad +\int_0^t\int_\Lambda S(t-s)g(u_{S-},z)\tilde{N}(dz,ds) \\
&:= S(t)\varphi(0)+K_1u+K_2u, t\in[t_0,T], u\in V_{q,q,}^D(T) \\
(K_\varphi u)(t_0+t) &= \varphi(t), \qquad -h\le t\le 0.
\end{aligned}
\tag{6.4.1}
$$

在上一节中，应用了 Schander-Tychonoff 不动点定理证明了定理。在这里将证明(6.4.1)中的算子 K_φ 为从 $L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$ 映射到自身的连续紧算子。因此，首先介绍下面 $L^q([t_0,T];X)$ 中紧集的相关定理。

定理 6.4.1. (见 Hausenblas [85,定理 4.1])令 X 为一个 Banach 空间，$1\le q<\infty$ 和 $A\subset L^q([t_0,T];X)$。集合 A 为 $L^q([t_0,T];X)$ 中相对紧的 当且仅当

(i) $\sup_{f\in A}\{\|f\|_{L^q}\}=M<\infty$,

(ii) $\lim\limits_{\theta\to 0}\int_0^{T-h_1}\|f(t+\theta)-f(t)\|_C^q\,dt=0$ 对所有的 $f\in A$,

(iii) 对每一个 $\varepsilon>0$ 存在紧集 $Q_\varepsilon\subset X$ 使得对每一个 $f\in A$，使得集合 $A_{\varepsilon,f}\subset[t_0,T]$ 对每一个 $t\in[t_0,T]\setminus A_{\varepsilon,f}$ 有 $\lambda(A_{\varepsilon,f})<\varepsilon$ 和 $f(t)\in Q_\varepsilon$。

另外，这里还介绍由 Aldous 给出的一些定义和紧包含的一些条件 (参看 Ethier and Kurtz[102]或者 Hausenblas[84,附录])。令 X 为一个可分 Banach 空间，$\{x^a\mid a\in A\}$ 为一组随机过程，样本曲线落在空间 $D([t_0,T];X)$ 中，使得 $x^a\in L^0(\Omega^a,F^a,P^a)$、$a\in A$。$(F_t^a)$ 为由 $x^a, a\in A$ 产生的自然 σ 域流。

定义 6.3([84，定义 A.2] 或 [85，定义 4.1])称 $\{x^a\mid a\in A\}$ 满足 Aldous 条件，

当且仅当对所有的$\varepsilon>0$ 和$\delta>0$ 存在$\theta>0$ 和$n_0\in N$使得对任意$\{\tau_a\}_{a\in A}$有

$$\sup_{h\le\theta}P^a(|x^a_{\tau_a}-x^a_{(\tau_a+h)\wedge T}|\ge\delta)\le\varepsilon,a\in A.$$

其中τ_a 为Ω^a中的(F^a_t)停时而且 $\tau_a\le T$。

定义 6.4 ([84，定义 A.3] 或 [85，定义 4.2]) 称 $\{x^a\,|\,a\in A\}$ 满足紧致条件，当且仅当对一个$\varepsilon>0$和每一个$t>0$，存在一个紧子集$K_{\varepsilon,t}\subset X$， 使得有

$$P^a(x^a_s\in K_{\varepsilon,t},\forall s\in[t_0,T])\ge1-\varepsilon,a\in A.$$

下面给出几个引理以及引理的证明。

引理 6.4.2. K_φ为由式 (6.4.1)定义的算子，若$\delta_f<1$和$\delta_g q<1$，则K_φ 映$V^D_{q,q}(T)$到$V_{q,q}(T)$，而且有：

(1) 存在$\gamma_0>0$和常数C_1、$C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,\gamma_0,q)<\infty$，使得对所有的$0<\gamma\le\gamma_0$有

$$\begin{aligned}|||K_\varphi u|||_{q,q,\gamma}\ &\le C_1\cdot(T-t_0)^{1-q(\gamma_0+\rho)}\|\varphi\|_{V_{q,-\rho}}\\&+C(T,t_0,-\delta_f,-\delta_g,\gamma_0,q)|||u|||_{q,q}\\&u\in V^{D(T)}_{q,q},\varphi\in V_{q,-\rho},\end{aligned}\tag{6.4.2}$$

（2）存在常数$C(t,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,p,q)<\infty$对所有的$t_0\le t\le T$有

$$\begin{aligned}|||K_\varphi u-K_\varphi v|||_{q,q,[t_0,t]}\ &\le C(t,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,p,q)|||u-v|||_{q,q,[t_0,t]}\\&u,v\in V^{D(T)}_{q,q},\varphi\in V_{q,-\rho},\end{aligned}\tag{6.4.3}$$

(3) 存在$\beta_0>0$以及常数C_2、$C(C,T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,\beta_0-\beta)<\infty$对所有的$0<\beta\le\beta_0$有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_1^\beta}E\int_{t_0}^{T-h_1}\|K_\varphi u(t+h_1)-K_\varphi u(t)\|^q\,dt\\&\qquad\le C_2\cdot(T-t_0)^{(1-q\rho)}\|\varphi\|_{V_{q,-\rho}}\\&\qquad+C(C,T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,\beta_0-\beta)|||u|||^q_{q,q}\\&u\in V^{D(T)}_{q,q},\varphi\in V_{q,-\rho}.\end{aligned}\tag{6.4.4}$$

证明：首先证明由方程(6.4.1)可得算子 K_φ 映 $V^D_{q,q}(T)$ 到$V_{q,q}(T)$ ，由此可

得 (6.4.2)成立。 注意到对 $0<\rho<1/q$ 有

$$
\begin{aligned}
\|| S(t)\varphi \||_{q,q}^{q} &= \int_0^T E \sup_{-h\le\theta\le0} | S(t+\theta)\varphi(0)|^{p}\, dt \\
&\le \int_0^T \sup_{-h\le\theta\le0} | S(t+\theta) |_{L(V_{-\rho},E)}^{q}\, dt E |\varphi(0)|_{-\rho}^{q} \\
&\le \sup_{-h\le\theta\le0} \int_0^T (t+\theta)^{-q\rho}\, dt E|\varphi(0)|_{-\rho}^{q} \\
&\le C_1\cdot(T-t_0)^{1-q\rho} E|\varphi(0)|_{-\rho}^{q}.
\end{aligned}
\tag{6.4.5}
$$

对 K_1u，由 Young 不等式可得

$$
\begin{aligned}
\|| K_1 u \||_{q,q}^{q} &= \int_0^T E| \sup_{-h\le\theta\le0} \int_0^{t+\theta} S(t+\theta-s) f(u_{s-})ds |^{q}\, dt \\
&\le \int_0^T E[\sup_{-h\le\theta\le0} \int_0^{t+\theta} | S(t+\theta-s) f(u_{s-})|\, ds]^{q} dt \\
&\le \int_0^T E[\sup_{-h\le\theta\le0} \int_0^{t+\theta} | S(t+\theta-s)|_{L(V_{-\delta_f},X)} | f(u_{s-})|_{-\delta_f}\, ds]^{q} dt \\
&\le \int_0^T E[\sup_{-h\le\theta\le0} \int_0^{t+\theta} (t+\theta-s)^{-\delta_f} | f(u_{s-})|_{-\delta_f}\, ds]^{q} dt \\
&\le [\int_0^T (T-t)^{-\delta_f}\, dt]^{q} (T-t_0) E\int_0^T | f(u_{s-})|_{-\delta_f}^{q}\, dt.
\end{aligned}
$$

又由函数 f 满足 Lipschitz 条件可得

$$
\|| K_1 u \||_{q,q}^{q} \le \frac{C_f\cdot(T-t_0)^{(1-\delta_f)q+1}}{(1-\delta_f)} \|| u \||_{q,q}^{q}
\tag{6.4.6}
$$

由引理、 Young 不等式以及函数 g 满足 Lipschitz 条件，有

$$
\begin{aligned}
\|| K_2 u \||_{q,q}^{q} &= \int_0^T E[| \sup_{-h\le\theta\le0} \int_0^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s) g(u_{s-},z)\tilde{N}(dz,ds) |^{p}]dt \\
&\le C\int_0^T \sum_{l=1}^{n} [\sup_{-h\le\theta\le0} E\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda | S(t+\theta-s) g(u_{s-},z)|^{p^l}\, \nu(dz)ds]^{p^{n-l}}\, dt \\
&\le C\int_0^T \sum_{l=1}^{n} [\sup_{-h\le\theta\le0} E\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda (t+\theta-s) |^{-\delta_g p^l} | g(u_{s-},z)|_{-\delta_g}^{p^l}\, \nu(dz)ds]^{p^{n-l}}\, dt \\
&\le C\int_0^T \sum_{l=1}^{n} (\sup_{-h\le\theta\le0} E\int_0^{t+\theta} (t+\theta-s)^{-\delta_g p^l} \int_\Lambda | g(u_{s-},z)|_{-\delta_g}^{p^l}\, \nu(dz)ds)^{p^{n-l}}\, dt \\
&\le C\cdot C_g\cdot(\sum_{l=1}^{n} \int_0^T t^{-\delta_g p^l}\, dt)^{p^{n-l}} (T-t_0) E\int_0^T \| u \|_C^{q}\, dt \\
&\le C(T,t_0,C_g,\delta_g,p) \|| u \||_{q,q}^{q},
\end{aligned}
\tag{6.4.7}
$$

其中 $C(T,t_0,C_g,\delta_g,p)$ 为常数。 由(6.4.5)、 (6.4.6)和(6.4.7)， 可得下面不等式

$$|||K_\varphi u|||_{q,q}^q \le C_1\cdot(T-t_0)^{(1-q\rho)}\|\varphi\|_{V_{q,-\rho}}+C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q)|||u|||_{q,q}^q,$$

综上可得式(6.4.2)成立。

接下来，证明引理的(2)，

$$\begin{aligned}|||K_\varphi u-K_\varphi v|||_{q,q}^q=&\int_0^T E|\sup_{-h\le\theta\le0}\{\int_0^{t+\theta}S(t+\theta-s)(f(u_{s-})-f(v_{s-}))ds\\&+\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s)(g(u_{s-},z)-g(v_{s-},z))\tilde N(dz,ds)\}|^p\,dt\\\le&\int_0^T E|\sup_{-h\le\theta\le0}\int_0^{t+\theta}S(t+\theta-s)(f(u_{s-})-f(v_{s-}))ds|^p\,dt\\&+\int_0^T E|\sup_{-h\le\theta\le0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s)(g(u_{s-},z)\\&-g(v_{s-},z))\tilde N(dz,ds)|^p\,dt\\=&I_1+I_2,\end{aligned}\tag{6.4.8}$$

对I_1和I_2，与(6.4.6)和(6.4.7)一样，可得

$$\begin{aligned}I_1\ \le&\int_0^T\sup_{-h\le\theta\le0}E(\int_0^{t+\theta}|S(t+\theta-s)(f(u_{s-})-f(v_{s-}))|ds)^p dt\\\le&(\int_0^T(T-t)^{-\delta_f}dt)^q(T-t_0)E\int_0^T|f(u_{t-})-f(v_{t-})|_{-\delta_f}^q\,dt\\\le&C(T,t_0,C_f,\delta_f,q)|||u-v|||_{q,q}^q;\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}I_2\ \le&\int_0^T\sup_{-h\le\theta\le0}E|\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s)(g(u_{s-},z)-g(v_{s-},z))\tilde N(dz,ds)|^p\,dt\\\le&C\int_0^T\sum_{l=1}^n(\sup_{-h\le\theta\le0}E\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda(t+\theta-s)^{-\delta_g p^l}|g(u_{s-},z)\\&-g(v_{s-},z)|_{-\delta_g}^{p^l}\nu(dz)ds)^{p^{n-l}}dt\\\le&C\cdot C_g\cdot(\sum_{l=1}^n\int_0^T t^{-\delta_g^l}dt)^{p^{n-l}}(T-t_0)E\int_0^T\|u-v\|_C^q\,dt\\\le&C\cdot C_g\cdot(\sum_{l=1}^n\int_0^T t^{-\delta_g^l}dt)^{p^{n-l}}|||u-v|||_{q,q}^q.\end{aligned}$$

将 I_1和I_2代入(6.4.8)，得

$$|||Ku-Kv|||_{q,q}^q\le C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,p,q)|||u-v|||_{q,q}^q,\tag{6.4.9}$$

其中 $C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,p,q)$为常数，由此不等式(6.4.3)得证。

下证引理的(3)：

$$
\begin{aligned}
E\int_0^{T-h_1}|K_\varphi u(t+h_1)-K_\varphi u(t)|^q\,dt \le\, & E\int_0^{T-h_1}|[S(t+h_1)-S(t)]\varphi \\
& +\int_0^{t+h_1}S(t+h_1-s)f(u_{s-})ds-\int_0^t S(t-s)f(u_{s-})ds \\
& +\int_0^{t+h_1}\int_\Lambda S(t+h_1-s)g(u_{s-},z)\tilde{N}(dz,ds) \\
& -\int_0^t\int_\Lambda S(t-s)g(u_{s-},z)\tilde{N}(dz,ds)|^q\,dt \\
\le\, & E\int_0^{T-h_1}|[S(h_1)-I]\{S(t)\varphi+\int_0^t S(t-s)f(u_{s-})ds \\
& +\int_0^t\int_\Lambda S(t-s)g(u_{s-},z)\tilde{N}(dz,ds)\}|^q\,dt \\
& +E\int_0^{T-h_1}|\int_t^{t+h_1}S(t+h_1-s)f(u_{s-})ds|^q \\
& +E\int_0^{T-h_1}|\int_t^{t+h_1}\int_\Lambda S(t+h_1-s)g(u_{s-},z)\tilde{N}(dz,ds)|^q\,dt \\
=\, & I_3+I_4+I_5;
\end{aligned}
\tag{6.4.10}
$$

由 $[S(h_1)-I]=\int_0^h AS(r)dr, h>0$ 和$|AS(r)|\le Cr^{-\alpha},\alpha>0$，可得

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le C_1\left(\int_0^{h_1}AS(r)dr\right)^q E\int_0^{T-h_1}\|K_\varphi u\|_C^q\,dt \\
&\le C_1h_1^{(1-\alpha)q}\|\|K_\varphi u\|_{q,q}^q \\
&\le C_1h_1^{(1-\alpha)q}\{(T-t_0)^{(1-q\rho)}\|\varphi\|_{V_{q,-\rho}}^q \\
&\quad +C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q)\|\|u\|_{q,q}^q\};
\end{aligned}
$$

同样由函数f和g满足Lipschtiz条件，有

$$
\begin{aligned}
I_4 &\le E\int_0^{T-h_1}\left(\int_t^{t+h_1}|S(t+h_1-s)f(u_{s-})|\,ds\right)^q dt \\
&\le CE\int_0^{T-h_1}\left(\int_t^{t+h_1}(t+h-s)^{-\delta_f}\,|f(u_{s-})|_{-\delta_f}\,ds\right)^q dt \\
&\le h_1^{\beta_0}C(C_g,T,t_0,\delta_f)\|\|u\|_{q,q}^q,
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
I_5 &\le \int_0^{T-h_1}E|\int_t^{t+h_1}\int_\Lambda S(t+h_1-s)g(u_{s-},z)\tilde{N}(dz,ds)|^q\,dt \\
&\le \left(C\sum_{l=1}^n\int_0^T\{E|\int_t^{t+h_1}\int_\Lambda(t+h_1-s)^{-\delta_g p^l}\,|g(u_{s-},z)|_{-\delta_g}^{p^l}\,\nu(dz)ds\}^q\,dt\right. \\
&\le C_g\cdot h_1^{\beta_0}\left(C\sum_{l=1}^n\int_0^T t^{-\delta_g p^l}dt\right)^{p^{n-l}}E\int_0^T\|u\|_C^q\,dt \\
&\le C_g\cdot h_1^{\beta_0}\left(C\sum_{l=1}^n\int_0^T t^{-\delta_g^l}dt\right)^{p^{n-l}}\|\|u\|_{q,q}^q,
\end{aligned}
$$

其中β_0为一个与常数δ_f、δ_g、p和q有关的常数。将I_3、I_4以及I_5代入(6.4.10)，得

$$
\begin{aligned}
E\int_0^{T-h_1}|K_\varphi u(t+h_1)-K_\varphi u(t)|^q\,dt &\le C_1 h_1^{(1-\alpha)q}(T-t_0)^{(1-q\rho)}\|\varphi\|_{V_{q,-\rho}}^q \\
&\quad +C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q)\|u\|_{q,q}^q \\
&\quad +h_1^{\beta_0}(C\sum_{l=1}^n\int_0^T t^{-\delta_g^l}dt)^{p^{n-1}}\|u\|_{q,q}^q \\
&\le h_1^\beta[C\cdot C_1\cdot h_1^{(1-\alpha)q-\beta}(T-t_0)^{(1-q\rho)}\|\varphi\|_{V_{q,-\rho}}^q \\
&\quad +C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,\beta_0-\beta,q)\|u\|_{q,q}^q],
\end{aligned}
\tag{6.4.11}
$$

也即不等式 (6.4.4)成立。

引理 6.4.3. 在定理6.3.1 条件下，并且令

$$K_\varphi:L_D^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))\to L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$$

为由下式定义的算子

$$
\begin{aligned}
(K_\varphi u)(t) &= S(t)\varphi+\int_0^t S(t-s)f(u_{s-})ds \\
&\quad +\int_0^t\int_\Lambda S(t-s)g(z,u_{s-})\tilde{N}(dz,ds) \\
&\qquad t\in[t_0,T],u\in V_{q,q}^D(T),
\end{aligned}
$$

则K_φ映有界集到紧集，而且算子在$L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$上是连续的。

证明：首先介绍$L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$中有界集的定义。集合$A\subset L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$为有界的，当且仅当对所有的$\varepsilon>0$存在常数$K=K(\varepsilon)<\infty$使得

$$P(\|u\|_{L^q}\ge K)\le\varepsilon,\qquad u\in A.$$

下面，将证明集合$K_\varphi(A)$在$L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$中为态紧的。令$A$为$L_D^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$中的一个紧集，$\varphi\in L^0(\Omega;V_{-\rho})$为$F_{t_0}$-可测，对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $M>0$有

$$P(\|u\|_{L^q}\ge M)\le\frac{\varepsilon}{8},\text{和}\qquad P(|\varphi|_{-\rho}\ge M)\le\frac{\varepsilon}{8}.$$

对r_1、r_2和β、$\gamma>0$定义以下集合

$$
\begin{aligned}
K(r_1,r_2,\beta,\gamma) := \{&v\in L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))\cap L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\gamma}^C)), \\
&\|v\|_{L_\gamma^q}\le r_1,\text{and}\sup_{0<h_1\le1}h_1^{-\beta}\int_0^{T-h_1}\|K_\varphi v(t+h_1)-K_\varphi v(t)\|_C^q\,dt\le r_2\},
\end{aligned}
$$

其中

$$\|v\|_{L^q_\gamma}:=(\int_{t_0}^{T}\|v\|^q_{C,\gamma}\,ds)^{1/q},\qquad v\in L^q([t_0,T];X).$$

由定理6.4.1，集合$K(r_1,r_2,\beta,\gamma)$为$L^q([t_0,T];X)$中的紧集，而且

$$\begin{aligned}P(K_\varphi \,\overline{\in}\, K(r_1,r_2,\beta,\gamma)) &\le P(\|K_\varphi u\|_{L^q_\gamma}>r_1)\\ &\quad +P(h_1^{-\beta}E[\int_{0}^{T-h_1}\|K_\varphi u(\tau+h_1)\\ &\quad -K_\varphi u(\tau)\|^q_C\,dt\,|\,F_\tau]>r_2),u\in A.\end{aligned}$$

对$u\in A$和$\varphi\in L^0(\Omega;V_{-\rho})$，可以由(6.3.3)定义$u^M$：

$$\varphi^M:=\begin{cases}\varphi & \text{当}|\varphi|_{-\rho}\le M\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}P(\|K_\varphi u\|^q_{L^q_\gamma}>r_1) &\le P(\|K_\varphi u\|^q_{L^q_\gamma}>r_1,u=u^M,\varphi=\varphi^M)\\ &\quad +P(\|K_\varphi u\|^q_{L^q_\gamma}>r_1,u\ne u^M \text{ 或 } \varphi\ne\varphi^M)\\ &\le \frac{E\|K_{\varphi^M}u^M\|^q_{L^q_\gamma}}{r_1^q}+P(u\ne u^M)+P(\varphi\ne\varphi^M).\end{aligned}$$

由引理6.4.2的结论(1)， 假设 $0<\gamma\le\gamma_0$， 则

$$\begin{aligned}\frac{E\|K_\varphi u^M\|^q_{L^q_\gamma}}{r_1^q} &\le \frac{\{C_1(T-t_0)^{1-q(\gamma_0+\rho)}\|\varphi^M\|_{V_{q,-\rho}}+C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,\gamma_0.q)\|u^M\|_{q,q}\}^q}{r_1^q}\\ &\le \frac{\{C_1(T-t_0)^{1-q(\gamma_0+\rho)}M+C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,\gamma_0,q)M\}^q}{r_1^q},\end{aligned}$$

由 u^M和 φ^M的定义,则有

$$\begin{aligned}P(u\ne u^M) &\le P(u\ge u^M)\\ P(\varphi\ne\varphi^M) &\le P(\varphi\ge\varphi^M)\\ &\le \frac{\varepsilon}{8}.\end{aligned}$$

若选择 r_1 满足

$$\frac{\{C_1(T-t_0)^{1-q(\gamma_0+\rho)}M+C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,\gamma_0,q)M\}^q}{r_1^q}\le\frac{\varepsilon}{4},\qquad(6.4.12)$$

可得

$$P(\| K_{\varphi}u\|_{L^q_\gamma}^q > r_1) \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.4.13}$$

同样，有引理 6.4.2 的(3)，存在 $\beta_0 > 0$ 使得 $0 < \beta \le \beta_0$ 有

$$\begin{aligned}
&P\left(h_1^{-\beta} E\left[\int_0^{T-h_1} \| K_{\varphi}u(\tau+h_1) - K_{\varphi}u(\tau)\|_C^q \, dt \mid F_\tau\right] > r_2\right) \\
&\le \frac{h_1^{-\beta_0} E\left[\int_0^{T-h_1} \| K_{\varphi}u(\tau+h_1) - K_{\varphi}u(\tau)\|_C^q \, dt \mid F_\tau\right]}{r_2} \\
&\quad + P(u \ge u^M) + P(\varphi \ge \varphi^M) \\
&\le h_1^{-\beta} \frac{C_2(T-t_0)^{(1-q\rho)} \|\varphi\|_{V_{q,-\rho}}^q + C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,\beta_0-\beta)\| u^M \|_{q,q}^q}{r_2} \\
&\quad + P(u \ge u^M) + P(\varphi \ge \varphi^M)
\end{aligned}$$

若选择 r_2 使得

$$h_1^{-\beta} \frac{\left[C_2(T-t_0)^{(1-q\rho)} + C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,\beta_0-\beta)\right] M^q}{r_2} \le \frac{\varepsilon}{4} \tag{6.4.14}$$

则

$$P\left(h_1^{-\beta} E\left[\int_0^{T-h_1} \| K_{\varphi}u(\tau+h_1) - K_{\varphi}u(\tau)\|_C^q \, dt \mid F_\tau\right] > r_2\right) \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad 0 < \beta \le \beta_0 \tag{6.4.15}$$

因此,对 $0 < \gamma < \gamma_0$、$0 < \beta < \beta_0$ 和 r_1 满足(6.4.12) 以及 r_2 满足(6.4.15)， 可得对 $K(r_1, r_2, \beta, \gamma)$ 有

$$P\left(K_{\varphi}u \,\overline{\in}\, K(r_1, r_2, \beta, \gamma)\right) \le \varepsilon,$$

从而态紧性可证。

接下来证明引理 6.4.3 的第二部分， 算子 K_{φ} 关于 $L^0(\Omega; L^q([t_0,T]; X))$ 中的距离为连续的。

令 $\{u^{(n)} \mid n \in N\}$ 为 $L_D^0(\Omega; L^q([t_0,T]; X))$ 中的序列，存在一个 $u \in L^0(\Omega; L^q([t_0,T]; X))$ 使得 $u^{(n)} \to u$ 若收敛，也即 $\| u^{(n)} - u\|_{L^q} \to 0$ 依概率的。由 $\{u^{(n)} \mid n \in N\}$ 为有界的，集合 $\{K_{\varphi}u^{(n)} \mid n \in N\}$ 在 $L^0(\Omega; L^q([t_0,T]; X))$ 中是态紧的，这样有 $K_{\varphi}u \in L^0(\Omega; L^q([t_0,T]; X)$。因此，如果 $\| K_{\varphi}u^{(n)} - K_{\varphi}u\|_{L^q} \to 0$ 为依概率的，则 $K_{\varphi}u^{(n)}$ 收敛到 $K_{\varphi}u$ 在 $L^0(\Omega; L^q([t_0,T]; X))$ 中。这样，如果能找到对所有的 $\varepsilon > 0$ 和

$\delta_1 > 0$ 存在 N 满足

$$P(\| K_\varphi u^{(n)} - K_\varphi u \|_{L^q} \geq \delta_1) \leq \varepsilon, \qquad \forall n \geq N$$

就可以了。令 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta_1 > 0$ 为给定，由引理 6.4.2 的(2)可得， 可以找到 $M > 0$ 使得

$$\frac{C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q,p)M^q}{\delta_1^q} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6.4.16}$$

又因为 $\| u^{(n)} - u \|_{L^q} \to 0$ 依概率的，存在一个 N 使得

$$P(\| u^{(n)} - u \|_{L^q} \geq M) \leq \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \forall n \geq N.$$

定义

$$u_n^M := \begin{cases} u \text{当} \ \| u - u^{(n)} \|_{L^q} < M, \\ 0 \qquad \text{其他}, \end{cases}$$

和

$$u^{(n)M} := \begin{cases} u^{(n)} \text{当} \ \| u - u^{(n)} \|_{L^q} < M, \\ 0 \qquad \text{其他}, \end{cases}$$

对 $n \in N$， 找一个 $K > 0$ 满足

$$\varphi^K := \begin{cases} \varphi \text{当} |\varphi|_{-\rho} \leq K, \\ 0 \qquad \text{其他}. \end{cases}$$

则对 $M > 0$ 有

$$\begin{aligned} P(\| K_\varphi u^{(n)} - K_\varphi u \|_{L^q} \geq \alpha) &= P(\| K_\varphi u^{(n)} - K_\varphi u \|_{L^q} \geq \alpha, u_n^M = u, \varphi^K = \varphi) \\ &\quad + P(\| K_\varphi u^{(n)} - K_\varphi u \|_{L^q} \geq \alpha, u_n^M \neq u \text{ or } \varphi^K \neq \varphi) \\ &\leq P(\| K_{\varphi^K} u^{(n)M} - K_{\varphi^K} u_n^M \|_{L^q} \geq \alpha) \\ &\quad + P(u_n^M \neq u \text{ or } \varphi^K \neq \varphi), \qquad n \in N. \end{aligned}$$

由 Chebyscheff 不等式， 对 $\alpha > 0$ 和 $M > 0$ 满足 (0)，可得

$$\begin{aligned} & P(\| K_\varphi u^{(n)} - K_\varphi u \|_{L^q} \geq \delta_1) \\ &\leq \frac{\| K_{\varphi^K} u^{(n)M} - K_{\varphi^K} u_n^M \|_{q,q}^q}{\alpha^q} + P(\| u^{(n)} - u \|_{L^q} \geq M) + P(|\varphi|_{-\rho} \geq K) \\ &\leq \frac{C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,q,p)M^q}{\delta_1^q} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \qquad n \geq N. \end{aligned} \tag{6.4.17}$$



综上可得 K_φ 在 $L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$ 中为连续的 。

$L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$ 中的紧集可由 Aldous 得结论得到，而紧致条件也可看文献(Ethier 和 Kurtz[102] 或者 Hausenblas[84，附录])。为了证明算子在 $L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$ 中的紧性，我们需要如下引理。

引理 6.4.4. K_φ 为由(6.4.1)定义的，若 $\delta_g-\rho<\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ 和 $\delta_f-\rho<1-\frac{1}{q}$。则有：

(1) 存在常数 $C_3<\infty$ 和 $C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,p)<\infty$ 使得

$$\|| K_\varphi u \||_{p,\infty,-\rho}\le C_3\|\varphi\|_{V_{p,-\rho}}+[C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,p)]^{1/p}\||u\||_{q,q} \quad u\in V_{q,q}^D(T),\varphi\in V_{p,-\rho}, \tag{6.4.18}$$

(2) 存在常数 $C(T,t_0,C_f,C_g,q,\rho,\delta_g,\delta_f,p)<\infty$ 使得

$$\|| K_\varphi u-K_\varphi v \||_{p,\infty,-\rho}\le [C(T,t_0,C_f,C_g,q,\rho,\delta_g,\delta_f,p)]^{1/p}\||u-v\||_{q,q} \quad u,v\in V_{q,q}^D(T),\varphi\in V_{p,-\rho}, \tag{6.4.19}$$

(3) 对所有的 $\delta>0$ 存在常数 $\beta_0>0$ 和 $C,C_4<\infty$ 使得对所有的 $0<\beta\le\beta_0$ 和 F_t-停时 τ 有：

$$\sup_{0\le h_1\le\theta}E[|K_\varphi u(\tau+h_1)-K_\varphi u(\tau)|_{-(\rho+\delta)}^p|F_\tau] \le \theta^\beta(C\|\varphi\|_{V_{p,-\rho}}^p+C_4\||u\||_{q,q}^p). \quad u,v\in V_{q,q}^D(T),\varphi\in V_{p,-\rho}, \tag{6.4.20}$$

(4) 若 $\delta>\max(\delta_g+\frac{1}{q},\delta_f+1-\frac{1}{q},\rho)$，则存在常数 $C_5,C_6,C_7,C_8<\infty$ 使得

$$E\sup_{t_0\le t\le T}[|K_\varphi u(t)|_{-\delta}]\le C_5\|\varphi\|_{V_{p,-\gamma}}+C_6\||u\||_{p,p}+(C_7+C_8)\||u\||_{q,q}, \quad u,v\in V_{q,q}^D(T),\varphi\in V_{p,-\rho}. \tag{6.4.21}$$

证明： 由模的定义 $\||\cdot\||_{p,\infty,-\rho}$ 和算子 K_φ 的定义，可得

$$
\begin{aligned}
E\|(K_\varphi u)_t\|_{C,-\rho}^p \le\, & E\|S(t+\theta)\varphi(0)\|_{C,-\rho}^p + E|\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta} S(t+\theta-s)f(u_{s-})ds|_{-\rho}^p \\
& + E|\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s)g(z,u_{s-})\tilde{N}(dz,ds)|_{-\rho}^p \\
\le\, & \|S(t+\theta)\|_C\|\varphi(0)\|_{V_{p,-\rho}}^p + E(\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}|S(t+\theta-s)f(u_{s-})|_{-\rho}ds)^p \\
& + E(\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda |S(t+\theta-s)g(z,u_{s-})|_{-\rho}\nu(dz)ds)^p \\
=\, & C_3\|\varphi\|_{V_{p,-\rho}} + J_1 + J_2,
\end{aligned}
\tag{6.4.22}
$$

对 J_1 和 J_2，由 Lipschitz 条件、Hölder 不等式和 Jensen 不等式，有

$$
\begin{aligned}
J_1 &= E(\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}|S(t+\theta-s)f(u_{s-})|_{-\rho}ds)^p \\
&\le E(\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}|S(t+\theta-s)|_{L(V_{-\delta_f},V_{-\rho})}\|f(u_{s-})|_{-\delta_f}ds)^p \\
&\le E(\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}(t+\theta-s)^{(\rho-\delta_f)}|f(u_{s-})|_{-\delta_f}ds)^p \\
&\le C_f\cdot\sup_{-h\le\theta\le 0}(t+\theta-t_0)^{p(1-1/r+\rho-\delta_f)}E(\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}|u_{s-}|_C^r ds)^{p/r} \\
&\le C_f\cdot\sup_{-h\le\theta\le 0}(t+\theta-t_0)^{p(1-1/r+\rho-\delta_f)}\|\!|u|\!\|_{r,r,[t_0,t]}^p, \\
J_2 &= E(\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda|S(t+\theta-s)g(z,u_{s-})|_{-\rho}\nu(dz)ds)^p \\
&\le \sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda E|S(t+\theta-s)|_{L(V_{-\delta_g},V_{-\rho})}^p|g(z,u_{s-})|_{-\delta_g}^p\nu(dz)ds) \\
&\le \sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda(t+\theta-s)^{(\rho-\delta_g)p}|g(z,u_{s-})|_{-\delta_g}^p\nu(dz)ds \\
&\le C_g\sup_{-h\le\theta\le 0}\{(t+\theta-s)^{p(1-1/r-(\rho-\delta_g)p)}\cdot\int_0^{t+\theta}|u_{s-}|_C^r ds\} \\
&\le \sup_{-h\le\theta\le 0}\{C_g\cdot(t+\theta-s)^{p(1-1/r-(\rho-\delta_g)p)}\}\|\!|u|\!\|_{r,r,[t_0,t]}^p.
\end{aligned}
$$

其中 r 满足 $p(1-1/r+\rho-\delta_f)>0$ 和 $p(1-1/r-(\rho-\delta_g)p)>0$。因为 q 满足假设 $p(1-1/q+\rho-\delta_f)>0$ 和 $p(1-1/q-(\rho-\delta_g)p)>0$，得

$$
\begin{aligned}
\|\!|K_\varphi u|\!\|_{p,\infty,-\rho} &= \sup_{t_0\le t\le T}E\|(K_\varphi u)_t\|_{C,-\rho}^p \\
&\le C_3\|\varphi\|_{V_{p,-\rho}} + \sup_{t_0\le t\le T}\{C_f\cdot\sup_{-h\le\theta\le 0}(t+\theta-t_0)^{p(1-1/r+\rho-\delta_f)} \\
&\quad + C_g\cdot\sup_{-h\le\theta\le 0}C(t+\theta-s)^{p(1-1/r-(\rho-\delta_g)p)}\}\|\!|u|\!\|_{q,q}^p \\
&\le C_3\|\varphi\|_{V_{p,-\rho}} + C(T,t_0,C_f,C_g,\delta_f,\delta_g,p)\|\!|u|\!\|_{q,q}^p
\end{aligned}
\tag{6.4.23}
$$

其中 $C(T,t_0,\delta_f,\delta_g,p)$ 为常数，式 (6.4.18)得证。

不等式 (6.4.19) 同样由

$$
\begin{aligned}
&E\|(K_\varphi u)_t-(K_\varphi v)_t\|_{C,-\rho}^p\\
&\le E|\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}S(t+\theta-s)(f(u_{s-})-f(v_{s-}))ds|_{-\rho}^p\\
&\quad+\sup_{-h\le\theta\le 0}E|\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s)(g(z,u_{s-})-g(z,v_{s-})\tilde N(dz,ds)|_{-\rho}^p\\
&\le\sup_{-h\le\theta\le 0}E(\int_0^{t+\theta}|S(t+\theta-s)(f(u_{s-})-f(v_{s-}))|_{-\rho}\,ds)^p\\
&\quad+\sup_{-h\le\theta\le 0}E(\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda|S(t+\theta-s)(g(z,u_{s-})-g(z,v_{s-})|_{-\rho}\,\nu(dz)ds)^p\\
&=J_4+J_5,
\end{aligned}
\tag{6.4.24}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
J_4&\le\sup_{-h\le\theta\le 0}E(\int_0^{t+\theta}|S(t+\theta-s)|_{L(V_{-\delta_f},V_{-\rho})}\|f(u_{s-})-f(v_{s-})|_{-\delta_f}\,ds)^p\\
&\le\sup_{-h\le\theta\le 0}(t+\theta-t_0)^{p(1-1/q+\rho-\delta_f)}E(C_f\cdot\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\|u_{s-}-v_{s-}\|_C^q\,ds)^{p/q}\\
&\le C_f\cdot\sup_{-h\le\theta\le 0}(t+\theta-t_0)^{p(1-1/q+\rho-\delta_f)}\|\!|u-v|\!\|_{q,q,[t_0,t]}^p,\\
J_5&\le\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda E|S(t+\theta-s)|_{L(V_{-\delta_g},V_{-\rho})}^p|g(z,u_{s-})-g(z,v_{s-})|_{-\delta_g}^p\,\nu(dz)ds\\
&\le\sup_{-h\le\theta\le 0}(t+\theta-s)^{p(1-1/q-(\rho-\delta_g,p)}\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\|u_{s-}-v_{s-}\|_C^q\,ds\\
&\le C_g\cdot\sup_{-h\le\theta\le 0}C(t+\theta-s)^{p(1-1/q-(\rho-\delta_g)p)}\|\!|u-v|\!\|_{q,q,[t_0,t]}^p,
\end{aligned}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\|\!|K_\varphi u-K_\varphi v|\!\|_{p,\infty,-\rho}&=\sup_{t_0\le t\le T}E\|(K_\varphi u)_t-(K_\varphi v)_t\|_{C,-\rho}^p\\
&\le\sup_{t_0\le t\le T}\{\sup_{-h\le\theta\le 0}(t+\theta-t_0)^{p(1-1/q+\rho-\delta_f)}\\
&\quad+\sup_{-h\le\theta\le 0}C(t+\theta-s)^{p(1-1/q-(\rho-\delta_g)p)}\}\|\!|u-v|\!\|_{q,q,[t_0,t]}^p\\
&\le C(T,t_0,C_f,C_g,q,\rho,\delta_g,\delta_f,p)\|\!|u-v|\!\|_{q,q}^p,
\end{aligned}
\tag{6.4.25}
$$

从而可得不等式 (6.4.19)。

为证明 (6.4.20)， 注意到

$$
\begin{aligned}
&K_\varphi u(t+\theta)-K_\varphi u(t)\\
&=(S(t+\theta)-S(t))\varphi(0)\\
&\quad+\int_0^{t+\theta}S(t+\theta-s)(f(u_{s-})ds\\
&\quad+\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s)g(z,u_{s-})\tilde{N}(dz,ds)\\
&=(S(\theta)-I)S(t)\varphi(0)+(S(\theta)-I)\int_0^{t+\theta}S(t-s)(f(u_{s-})ds\\
&\quad+(S(\theta)-I)\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda S(t-s)g(z,u_{s-})\tilde{N}(dz,ds)\\
&\quad+\int^{t+\theta}S(t+\theta-s)f(u_{s-})ds\\
&\quad+\int^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s)(g(z,u_{s-})\tilde{N}(dz,ds)\\
&=[S(\theta)-I]S(t)\varphi(0)+[S(\theta)-I]K_\varphi u(t+\theta)\\
&\quad+F_1(t,\theta)+F_2(t,\theta),
\end{aligned}
\tag{6.4.26}
$$

因此 $S(\theta)-I=\int_0^\theta AS(r)dr$，有

$$
\begin{aligned}
|[S(\theta)-I]S(t)\varphi(0)|_{-\gamma+\delta} &\le \int_0^\theta |AS(t)\varphi(0)|_{-\gamma+\delta}\,dt\\
&\le \int_0^\theta t^{-1+\delta}dt\,|\varphi(0)|_{-\gamma}\\
&\le C\theta^\delta|\varphi|_{-\gamma}.
\end{aligned}
\tag{6.4.27}
$$

和

$$
E|[S(\theta)-I]K_\varphi u(t+\theta)|^p_{-\gamma+\delta}\le\theta^{p\delta}E|K_\varphi u(t+\theta)|^p_{-\gamma}.
\tag{6.4.28}
$$

与证明 (6.4.6) 和(6.4.7)同样的方法，可得

$$
\begin{aligned}
E|F_1(t,\theta)|^p_{-\gamma+\delta} &\le CE(\int_0^\theta|f(u_{(t+s-)})|_{-\delta_f}\,ds)^p\\
&\le C_f\theta^{p(1-1/q-(\delta_f-\gamma-\delta))}\{\int_0^\theta E\|u(t+s-)\|^q_C\}^{p/q},\\
E|F_2(t,\theta)|^p_{-\gamma+\delta} &\le CE|\int^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s)g(z,u_{s-})\tilde{N}(dz,ds)|^p_{-\gamma+\delta}\\
&\le C_g\theta^{(1-1p/q-p(\delta_g-\gamma-\delta))}\{\int_0^\theta E\|u(t+s-)\|^q_C\}^{p/q}.
\end{aligned}
\tag{6.4.29}
$$

将(6.4.27)、(6.4.28)和(6.4.29)代入(6.4.26), 可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le h_1\le\theta}E[|K_\varphi u(\tau+h_1)\;-\;K_\varphi u(\tau)|^p_{-(\rho+\delta)}|F_\tau]\\
&\qquad\le\; C\theta^\delta|\varphi|^p_{-\gamma}+\{C_f\theta^{p(1-1/q-(\delta_f-\gamma-\delta))}\\
&\qquad\qquad+C_g\theta^{(1-1p/q-p(\delta_g-\gamma-\delta))}\}\|\|u\|\|^p_{q,q},
\end{aligned}
\tag{6.4.30}
$$

也即是不等式(6.4.20)。
最后，证明 (6.4.21),由

$$\int_0^t \int_\Lambda S(t-s)g(z,u_{s-})\tilde{N}(dz,ds) = \int_0^t \int_\Lambda g(z,u_{s-})\tilde{N}(dz,ds)$$
$$+\int_0^t S(t-s)A\int_0^s \int_\Lambda g(z,u_{r-})\tilde{N}(dz,dr)ds,$$

有

$$\begin{aligned} E\sup_{t_0\le t\le T}[\| K_\varphi u(t)\|_{C,-\delta}] &= E\sup_{t_0\le t\le T}|\sup_{-h\le\theta\le 0} S(t+\theta)\varphi(0)|_{-\delta} \\ &+E\sup_{t_0\le t\le T}\sup_{-h\le\theta\le 0}|\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta} S(t+\theta-s)f(u_{s-})ds|_{-\delta} \\ &+E\sup_{t_0\le t\le T}|\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}\int_\Lambda S(t+\theta-s)g(z,u_{s-})\tilde{N}(dz,ds)|_{-\delta} \qquad (6.4.31)\\ &+E\sup_{t_0\le t\le T}|\int_0^{t+\theta} S(t+\theta-s)A\int_0^s\int_\Lambda g(z,u_{r-})\tilde{N}(dz,dr)ds|_{-\delta} \\ &= J_6+J_7+J_8+J_9. \end{aligned}$$

对$\gamma<\delta$和$\delta>\delta_f-1+1/q$，有

$$J_6\le E\sup_{t_0-h\le t\le T}|S(t)\varphi(0)|_{-\delta}\le C_5\|\varphi\|_{V_{p,-\gamma}}.$$

由 Minlowski 不等式得对$\varepsilon_1=\delta-\delta_f$有

$$\begin{aligned} J_7 &\le E\sup_{t_0\le t\le T}|\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta} S(t+\theta-s)f(u_{s-})|_{-\delta}\,ds \\ &\le E\sup_{t_0\le t\le T}\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}(t+\theta-s)^{-\varepsilon_1}|f(u_{s-})|_{-\delta-\varepsilon_1}\,ds \\ &\le E\sup_{t_0\le t\le T}\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}(t+\theta-s)^{-\varepsilon_1}\|u_{s-}\|_{C,-\delta-\varepsilon_1+\delta_f}\,ds \\ &\le E\sup_{-h\le\theta\le 0}(\int_0^{T+\theta}(t+\theta-s)^{-\varepsilon_1}\|u_{s-}\|_{C,-\delta-\varepsilon_1+\delta_f}\,ds \\ &\le C(T-t_0)^{1-1/q-\varepsilon_1}|\!|\!|u_{s-}|\!|\!|_{q,q} \\ &= C_6|\!|\!|u_{s-}|\!|\!|_{q,q}. \end{aligned}$$

由引理 6.2.1 和g的 Lipschitz 条件得

$$\begin{aligned} J_8 &\le \sup_{-h\le\theta\le 0}E(\int_0^{T+\theta}\int_\Lambda|S(T+\theta-s)g(z,u_{s-})|_{-\delta}^p\,\nu(dz)ds)^{1/p} \\ &\le C_g(T-t_0)^{1-\varepsilon_1}|\!|\!|u_{s-}|\!|\!|_{p,p} \\ &= C_7|\!|\!|u_{s-}|\!|\!|_{p,p}. \end{aligned}$$

令$\varepsilon_2=1+\delta_g-\delta$，由 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
J_9 &\le E\sup_{t_0\le t\le T}\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}|S(t+\theta-s)A\int_0^s\int_\Lambda g(z,u_{r-})\tilde N(dz,dr)|_{-\delta}\,ds\\
&\le E\sup_{t_0\le t\le T}\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}(t+\theta-s)^{-\varepsilon_2}|\int_0^s\int_\Lambda g(z,u_{r-})\tilde N(dz,dr)|_{-\delta-\varepsilon_2}\,ds\\
&\le E\sup_{t_0\le t\le T}(\sup_{-h\le\theta\le 0}\int_0^{t+\theta}(t+\theta-s)^{-q'\varepsilon_2}ds)^{1/q'}\\
&\quad\times(\int_0^{t+\theta}|\int_0^s\int_\Lambda g(z,u_{r-})\tilde N(dz,dr)|^q_{-\delta+1-\varepsilon_2}ds)^{1/q}\\
&\le (T-t_0)^{1-1/q-\varepsilon_2}\sup_{-h\le\theta\le 0}(\int_0^{T+\theta}\sum_{l=1}^n(\int_0^s\int_\Lambda E|g(z,u_{r-})|^{p^l}_{-\delta+1-\varepsilon_2}\nu(dz)dr)^{p^{n-l}}ds)^{1/q}\\
&\le C_g(T-t_0)^{1-\varepsilon_2}(\sup_{-h\le\theta\le 0}(\int_0^{T+\theta}\sum_{l=1}^n(\int_0^s\int_\Lambda E|u_{r-}|^{p^l}_{-\delta+1+\delta_g-\varepsilon_2}\nu(dz)dr)^{p^{n-l}}ds)^{1/q}\\
&\le nC_g(T-t_0)^{2-\varepsilon_2}(\int_0^T\|u_{s-}\|^q_{C,-\delta+1+\delta_g-\varepsilon_2}ds)^{1/q}\\
&= C_8\,\|\|u_{s-}\|\|_{q,q}\,.
\end{aligned}
$$

综上可得 (6.4.21) 。

引理 6.4.5. 同样在定理 6.3.1 的假设条件下，而且 $\delta>\max(\delta_g+\frac{1}{q},\delta_f+1-\frac{1}{q},\rho)$，则算子 K_φ 映 $L_D^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$ 中的有界集为 $L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$ 中紧集。若在 $L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$ 中 $u^{(n)}\to u$，则 $K_\varphi u^{(n)}\to K_\varphi u$ 为 $L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$ 子集，而且 $K_\varphi u\in L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$.

证明：令 A 为 $L_D^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$ 有界集，首先证明 $K_\varphi A$ 在 $L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$ 中为态紧的。$\varepsilon>0$ 和 $\delta_0>0$ 为给定的常数。由 $\varphi\in L^0(\Omega;V_{-\rho})$ 则存在 $M_1<\infty$ 使得

$$P(|\varphi|_{-\rho}\ge M_1)\le\frac{\varepsilon}{8}. \tag{6.4.32}$$

因为 A 为有界的，则存在 $M_2<\infty$ 使得

$$P(\|u\|_{L^q}\ge M_2)\le\frac{\varepsilon}{8},\qquad u\in A. \tag{6.4.33}$$

和前面一样，令 $M=\max(M_1,M_2)$ 和 u^M,φ^M，对 $u\in A$，由 $h_1>0$ 得

$$
\begin{aligned}
&P(|K_\varphi u(\tau+h_1)-K_\varphi u(\tau)|>r_1)\\
&\quad=P(|K_\varphi u(\tau+h_1)-K_\varphi u(\tau)|>r_1,u^M=u,\varphi^M=\varphi)\\
&\qquad+P(|K_\varphi u(\tau+h_1)-K_\varphi u(\tau)|>r_1,u^M\neq u\text{or}\varphi^M\neq\varphi)\\
&\quad\le P(|K_{\varphi^M}u^M(\tau+h_1)-K_{\varphi^M}u^M(\tau)|>r_1)\\
&\qquad+P(u^M\neq u)+P(\varphi^M\neq\varphi)\\
&\quad\le\frac{E|K_{\varphi^M}u^M(\tau+h_1)-K_{\varphi^M}u^M(\tau)|^p}{r_1^p}\\
&\qquad+P(\|u\|_{L^q}\ge M)+P(|\varphi|_{-\rho}\ge M),u\in A.
\end{aligned}
$$

由引理 6.4.4，存在 $\beta_0>0$ 和常数 $C_1,C_2<\infty$ 使得对所有 $0<\beta\le\beta_0$ 和 $0<h_1\le\theta$ 有

$$
\begin{aligned}
&E|K_{\varphi^M}u^M(\tau+h_1)-K_{\varphi^M}u^M(\tau)|^p\\
&\qquad\le C\theta^\beta\{C\|\varphi^M\|^p_{V_{p,-\rho}}+C_4\|u^M\|^p_{q,q}\},\qquad u\in A.
\end{aligned}
$$

因此

$$
P(|K_\varphi u(\tau+h_1)\ \ -K_\varphi u(\tau)|>r_1)\ \le\frac{(C+C_4)\theta^\beta M^p}{r_1^p}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4},0\le h_1\le\theta,u\in A.
$$

若 $\theta>0$ 满足

$$
\frac{(C+C_4)\theta^\beta M^p}{r_1^p}\le\frac{\varepsilon}{2}
$$

则

$$
P(|K_\varphi u(\tau+h_1)\ \ -K_\varphi u(\tau)|>r_1)\le\varepsilon,0\le h_1\le\theta,u\in A,
$$

这样证明了 Aldous 的条件。由引理 6.4.3 给出的紧的条件和[84]中的定义 A.3，从而得对所有的 $\tilde{\delta}<\delta$，嵌入 $V^C_{-\tilde{\delta}}\to V^C_{-\delta}$ 为紧的。特别的对 $\varepsilon>0$ 和 $\tilde{\delta}\in(\max(\delta_g+1/q,\delta_f+1-1/q,\rho),\delta)$ 为给定的，常数 M_1,M_2 和 M 如上给出的，则对 $R>0$ 有

$$
\begin{aligned}
P(\sup_{t_0\le t\le T}|K_\varphi u(t)|_{\tilde{\delta}}\ge R)\le{}&P(\sup_{t_0\le t\le T}|K_{\varphi^M}u^M(t)|_{\tilde{\delta}}\ge R)\\
&+P(\sup_{t_0\le t\le T}|K_\varphi u(t)|_{\tilde{\delta}}\ge R,u\neq u^M)\\
&+P(\sup_{t_0\le t\le T}|K_\varphi u(t)|_{\tilde{\delta}}\ge R,\varphi\neq\varphi^M),\qquad u\in A
\end{aligned}
$$

对上面的不等式，应用 Chebyscheff 不等式、引理 6.4.4 和 Jensen 不等式，可得存在常数 $C<\infty$ 有

$$
\begin{aligned}
P(\sup_{t_0\le t\le T}|K_\varphi u(t)|_{\tilde\delta}\ge R) &\le \frac{E\sup_{t_0\le t\le T}|K_{\varphi^M}u^M(t)|_{\tilde\delta}^p}{R^p} \\
&\quad +P(u\ne u^M)+P(\varphi\ne\varphi^M) \\
&\le \frac{(C_5+C_6+C_7+C_8)M^p}{R^p}+P(\|u\|_{L^q}\ge M) \\
&\quad +P(\varphi_{-\rho}\ge M), \qquad u\in A.
\end{aligned}
$$

对 $R>\dfrac{(C_5+C_6+C_7+C_8)}{\varepsilon^{1/p}}M$，则

$$
P(\sup_{t_0\le t\le T}|K_\varphi u(t)|_{\tilde\delta}\ge R)\le\varepsilon, u\in A
$$

从而证明了紧致性条件满足。

令 $\delta>\max(\delta_g+1/q,\delta_f+1-1/q,\rho)$，可以证明对所有 $\varphi\in L^0(\Omega;V_{-\rho})$， F_{t_0}-可测算子 K_φ 为从 $L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$ 到 $L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$ 连续的。

令 $\{u^{(n)},n\in N\}\subset L^0(\Omega;L^q([t_0,T];X))$ 为一列随机过程，满足 $u^{(n)}\to u\in L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$。由引理 6.4.4，可知集合 $\{K_\varphi u^{(n)},n\in N\}$ 为 $L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$ 中紧的。令 $\varepsilon>0,\gamma>0$ 为任给的，任意 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset[t_0,T],k\in N$，同时 $M>0$ 和 $K>0$ 满足

$$
M^p\le\frac{\varepsilon\gamma^p}{2C(T,t_0,q,\rho,\delta_g,\delta_f,p)k}, \tag{6.4.34}
$$

和

$$
P(|\varphi|_{-\rho}\ge K)\le\frac{\varepsilon}{4k}. \tag{6.4.35}
$$

可以选择 N 使得

$$
P(\|u^{(n)}-u\|_{L^p}\ge M)\le\frac{\varepsilon}{2k}, n\ge N, \tag{6.4.36}
$$

$u_n^M,u^{(n),M}$ 和 φ^K 和引理 6.4.3 中一样，则

$$
\begin{aligned}
&P(\max_{1\le i\le k}|K_\varphi u^{(n)}(t_i)-K_\varphi u(t_i)|_{-\rho}>\gamma) \\
&\quad\le\sum_{i=1}^k P(|K_\varphi u^{(n)}(t_i)-K_\varphi u(t_i)|_{-\rho}>\gamma).
\end{aligned} \tag{6.4.37}
$$

由 Chebyscheff 不等式得对 $n\in N$ 有

$$
\begin{aligned}
&P(|K_\varphi u^{(n)}(t_i)-K_\varphi u(t_i)|_{-\rho}>\gamma)\\
&\quad\le P(|K_\varphi u^{(n)}(t_i)-K_\varphi u(t_i)|_{-\rho}>\gamma, u_n^M=u, \varphi^K=\varphi)\\
&\qquad +P(|K_\varphi u^{(n)}(t_i)-K_\varphi u(t_i)|_{-\rho}>\gamma, u_n^M\neq u \text{ or } \varphi^K\neq\varphi)\\
&\quad\le P(|K_{\varphi^K} u^{(n),M}(t_i)-K_\varphi u_n^M(t_i)|_{-\rho}>\gamma)+P(u_n^M\neq u \text{ or } \varphi^K\neq\varphi)\\
&\quad\le\frac{E|K_{\varphi^K} u^{(n),M}(t_i)-K_\varphi u_n^M(t_i)|_{-\rho}^p}{\gamma^p}\\
&\qquad +P(u_n^M\neq u \text{ or } \varphi^K\neq\varphi), i=1,\cdots,k,
\end{aligned}
$$

由 $u^{(n),M}$ 和 u_n^M 的定义以及 M 和 K 的值可得 对 $n\in N$ 有

$$
\begin{aligned}
&P(|K_\varphi u^{(n)}(t_i)-K_\varphi u(t_i)|_{-\rho}>\gamma)\\
&\quad\le\frac{C(T,t_0,q,\rho,\delta_g,\delta_f,p)M^p}{\gamma^p}+P(\|u^{(n)}-u\|_{L^p}\ge M)+P(|\varphi|_{-\rho}\ge K)\\
&\quad\le\frac{\varepsilon}{2k}+\frac{\varepsilon}{4k}+\frac{\varepsilon}{4k}<\frac{\varepsilon}{k},\qquad i=1,\cdots,k
\end{aligned}
\tag{6.4.38}
$$

将(6.4.38)代入(6.4.37)，可得对 $n\ge N$ 有

$$
P(\max_{1\le i\le k}|K_\varphi u^{(n)}(t_i)\quad -K_\varphi u(t_i)|_{-\rho}>\gamma)\le\varepsilon.
$$

因此有

$$
(u^{(n)}(t_1),\cdots,u^{(n)}(t_k))\to(u(t_1),\cdots,u(t_k))
$$

当 $n\to\infty$ 时为依概率收敛，对任意的 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset[t_0,T]$ 都是成立的。由 Ethier 和 Kurtz[102]中定理 3.7.8，可得 K_φ 为连续的，也即 $K_\varphi u^{(n)}\to K_\varphi u$ 在 $L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$ 中，当 $u^{(n)}\to u$ 时有 $K_\varphi u^{(n)}\to K_\varphi u\in L^0(\Omega;D([t_0,T];V_{-\delta}^C))$。

第七章　Hilbert 空间中的 Lévy 过程驱动的半线性随机时滞系统的渐近可控性

7.1 引言

这里主要研究下面的 Lévy 过程驱动的半线性随机时滞系统的渐近可控性：

$$\begin{cases} dX(t) = [A_0X(t) + \int_{-h}^{0} a(s)A_1X(t+s)d_s + G(t,X(t)) + B_0u(t)]dt \\ \qquad +\varphi(t,X(t))dZ(t), \qquad t \in J := [0,T], \\ x(0) = p^0, \qquad x(s) = p^1(s) \qquad \text{a.e} \qquad s \in J_0 := [-h,0], \end{cases} \tag{7.1.1}$$

令 H 和 V 为两个实值可分 Hilbert 空间，有 $V \subset H \subset V^*$，空间 V 的内积和范数分别为 $<,>_V$ 和 $\|\cdot\|_V$。这里的 A_0 为定义在 $V \times V$ 上的一个半双线性型算子且满足 Garding's 不等式。A_1 为一个从 V 映射到 V^* 有界线性算子，同时算子 A_1 映 $D(A_1)(\supset D(A_0)$ 赋予 A_0 图范数)到空间 H 为连续的。非线性项 $G(t,X(t))$ 为 Lipschitz 连续映射，映 $L(-h,T;V)$ 到 $L(J;H)$。 假设 $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ 为一个 Hilbert 空间中的一个独立增量过程并且是二阶矩局部有界。为了深入研究，需要更多相关的假设，这些假设将在下一节里给出。

随机系统的控制理论在最近收到很多的关注，如 Klamka[45,46]、Balasubramaniam 和 Dauer [44]、Yuan 和 Mao [47]、Mathukumar 和 Balasubramaniam [1]，其他更多的研究文献可以参看文后的参考文献。由于时滞系统在实际应用中的重要性 因此已经有许多学者对时滞确定性系统的可控性进行了大量的研究，如 Baghli、 Benchohra 和 Ezinbi [41]， Balachandran 和 Dauer [42]， Jeong [86]， Jeong、 Kwun 和 Park [43]等。在文 [43]中， Jeong、Kwan 和 Park 考虑了方程(7.1.1)满足 $\varphi(t,X(t))=0$ 时，在 Hilbert 空间里证明了系统的渐近可控性。当 $G(t,X) \equiv f(t,X(t))$ 并且 $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ 为一个 Brownian 运动或者说一个 Wiener 过程，这个过程有有界的迹算子 Q 满足 $Q \geq 0$，这时方程(7.1.1)在文献 [1]中得到了很好研究。

在本章中，我们不需要像文献[43]中利用 Leray-Schauder 不动点定理来证明系统的渐近可控性。对于随机干扰的处理，由于随机干扰考虑的是 Lévy 过程，这里利用 Gaans 的文章[87]中对 Hilbert 空间中的 Lévy 过程采用级数方法所得到的结论，对方程(7.1.1)的渐近可控性进行了研究。这一研究实际上是将文[1]中 Brownian 运动驱动的随机时滞系统的可控性相关结论推广到了 Lévy 过程驱动的时滞微分系统中。

本章的主要内容安排如下：第二节主要介绍关于系数和 Lévy 过程的一些介绍和基本概念，第三节里为本章的主要结果以及对主要结果的证明，最后在第四节中我们给出了一个例子来说明我们的结果是正确有用的。

7.2 几个假设和概念

令 (Ω,F,P) 为一个概率空间，其 F 上的域流为 $\{F_t\}_{t\ge0}$， K 和 H 为可分的实值 Hilbert 空间，过程 $Z=\{Z_t\}_{t\ge0}$ 为一个定义在概率空间 (Ω,F,P) ，值落在 Hilbert 空间 K 上随机连续的平稳独立增量过程， $Z(0)=0$ 同时对所有的 $T\ge0$ 满足 $\sup\limits_{0\le t\le T}E\|Z(t)\|^2<\infty$ 。令 Q 为 $Z(t)$ 的一个协方差算子满足对所有的 $x,y\in K$ 有 $<Qx,y>=E<\tilde{Z}(1),x><\tilde{Z}(1),y>$，则 Q 为一个迹算子。设 $(h_i)_{i\in N}(N\in N)$ 为空间 K 一个正交基，这一正交基为算子 Q 在特征值 $(\lambda_i)_{i\in N}$ 下的特征向量。这样我们可以写成以下形式

$$m:=EZ(t),\qquad \tilde{Z}(t):=Z(t)-m,$$
$$\tilde{Z}_i(t):=<\tilde{Z}(t),h_i>,\qquad t\ge0,i\in N.$$

通常，将所有的强可测而且平方可积的值落在空间 H 上的随机变量表示为空间 $L^2(\Omega,H)$，空间 $L^2(\Omega,H)$ 上的范数为 $\|X(\cdot)\|_{L^2}=(E\|X(\cdot,\omega)\|_H^2)^{1/2}$。

注： 迹算子 Q 为对称的、半正定的满足迹为 $\mathrm{trace}\,Q=E\|\tilde{Z}(1)\|^2$ 。 这样可以得到 Q 相应的特征值为 $\lambda_i=E\|\tilde{Z}_i(1)\|^2$ 其中 $i\in N$ ，对特征值 λ_i 有 $\sum\limits_{i\in N}\lambda_i=\mathrm{trace}Q$ 。

引理 7.2.1. ([87，定理 1.3]) 令$\Phi:[0,+\infty)\to L^2(\Omega;L(K,H))$ 为一个适应的连续映射，这里 $L(K,H)$ 表示所有的有界线性算子 $K\to H$，$|||\cdot|||$ 为空间 $L(K,H)$ 的范数。级数$\sum_{i\in N}\int_0^t\Phi(s)h_i d\tilde{Z}_i(s)$ 在空间 $L^2(\Omega,H)$ 中为收敛的，也即是有，

$$\sum_{i\in N}\int_0^t\Phi(s)h_i d\tilde{Z}_i(s)=\int_0^t\Phi(s)d\tilde{Z}(s)$$

同时对所有的$t\geq 0$ 都有

$$\begin{aligned}E\|\sum_{i\in N}\int_0^t\Phi(s)h_i d\tilde{Z}_i(s)\|^2 &= \sum_{i\in N}\lambda_i\int_0^t E\|\Phi_i(s)\|^2\,ds\\ &\leq (\mathrm{trace}Q)\int_0^t E|||\Phi(s)|||^2\,ds.\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

令L和B分别为$[0,\infty)$上的 Lebesgue σ-域和$[-h,0]$上的 Borel σ-域。同时令μ为一个$[-h,0]$上的 Borel 测度，$g:[0,\infty)\times[-h,0]\times V\times V\to H$为一个满足如下假设的非线性映射：

假设(H7.1)

(i) 对任意的$x,y\in V$,映射$g(\cdot,x,y)$为强$L\times B$-可测的；

(ii) 存在正常数L_0,L_1,L_2使得

$$\|g(t,s,x_1,y_1)-g(t,s,x_2,y_2)\|_H\leq L_1\|x_1-x_2\|_V+L_2\|y_1-y_2\|_V,\tag{7.2.2}$$

$$|g(t,s,0,0)|\leq L_0,\tag{7.2.3}$$

对所有的 $(t,s)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$ 和$x_1,x_2,y_1,y_2\in V$。

对于 $x\in L^2(-h,T;V)$，$T>0$，假设

$$G(t,x)=\int_{-h}^0 g(t,s,x(t),x(t+s))\mu(ds).$$

同时给出如下假设

假设(H7.2) 令$\varphi:J\times V\to L(K,H)$为一个非线性映射。对任意的 $x_1,x_2\in V$，存在常数$L_3>0$，使得

$$|||\varphi(t,x_1)-\varphi(t,x_2)|||\leq L_3\|x_1-x_2\|_V,\varphi(t,0)=0\tag{7.2.4}$$

类似于 Jeong [86]，可以定义方程(7.1.1)的解半群如下：

$S(t)g=(x(t;p),x_t(\cdot;p)),$

其中的 $p=(p^0,p^1)\in Z:=H\times L^2(-h,0;V)$， $x(t;p')$ 为方程(7.1.1)满足 $u(t)=0$ 和 $G(t,x)=0$ 时候的解，$x_t(s;p)$ 表示的是定义在 $[-h,0]$ 上的函数 $x_t(s;p)=x(t+s;p)$。$S(t)$ 为一个 Z 上的 C_0-半群，$S(t)$ 的无穷小生成元为 A 并有如下特征

$$\begin{aligned}D(A)\ &=\{(p^0,p^1):p^0\in D(A_0),p^1\in H^{1,2}(-h,0;V),p^1(0)=p^0,\\&\qquad A_0p^0+\int_{-h}^{0}a(s)A_1p^1(s)ds\in H\},\\A\ &=(A_0p^0+\int_{-h}^{0}a(s)A_1p^1(s)ds,p')\end{aligned}$$

由半群的性质，那么这里存在常数 $\alpha>0$ 和 $M\geq 1$ 使得

$\|S(t)\|^2\leq Me^{-\alpha t},0\leq t<\infty.$

利用方程的解半群(具体的可以参考 Di Blasio et al. [103]; Nakagiri [104])，方程(7.1.1)可以转换成下面的抽象的发展方程的形式

$$\begin{cases}dw(t)&=[Aw(t)+G(t,w(t))+B(u(t))]dt\\&\quad+\Phi(t,w(t))dZ(t),\\w(0)&=p,\end{cases}\tag{7.2.5}$$

其中 $w(t)=(x(t;p,u),x_t(\cdot;p,u))\in Z$， $p\in Z$，

$G(t,w(t))=\int_{-h}^{0}g(t,s,x(t),x_t(s))ds$， $Bu=(b_0u,0)$ 和 $\Phi(t,w(t))=\varphi(t,x(t),0)$。

方程(7.2.5)的适度解为

$$\begin{aligned}w(t;p,u)\ &=\ S(t)p+\int_0^t S(t-s)\{G(s,w(s))+B(u(s))\}ds\\&\quad+\int_0^t S(t-s)\Phi(s,w(s))dZ(s).\end{aligned}\tag{7.2.6}$$

定义系统(7.2.5)的可达集为满足如下条件的集合，

$R(T,p)=\{Z(T;p,u):u\in L^2(0,b;U)\}.$

定义 7.1[45] 系统(7.2.5) 称为 J 上随机相对渐近可控的，如果满足

$\overline{R(T,p)}=L^2(\Omega,F_T;Z).$

也即是，所有 $L^2(\Omega,F_T;Z)$ 上的点都可以由任意初始值出发到时刻 T 渐近可达的。

7.3 渐近可控性

Muthukumar 和 Balasubramaniam 在文[1]中得到了当系统(7.1.1)满足 $G(t,x)\equiv f(t,x)$，而且其驱动的随机过程为 Brownian 运动的时候，系统的渐近可控的充分条件。

现在考虑当系统(7.1.1)不满足上面提到的条件时，系统的渐近可控性的充分条件。为方便起见，假设半群 $S(t)$ 为一致有界的，也即是对所有的常数 $M>0$ 都有

$$\|S(t)\|^2\leq M, t\geq 0.$$

首先，给出一个相关引理。

引理 7.3.1. [43，引理 3.1]令 $x\in L^2(-h,T;V)$, $T>0$。则 $G(\cdot,x)\in L^2(0,T;H)$ 并有

$$\begin{aligned}\|G(\cdot,x)\|_{L^2(0,T;H)} &\leq \mu([-h,0])\{L_0\sqrt{T}+(L_1+L_2)\|x\|_{L^2(0,T;V)} \\ &+L_2\|x\|_{L^2(-h,0;V)}\}.\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

另外如果有 $x_1,x_2\in L^2(-h,T,V)$， 那么

$$\begin{aligned}\|G(\cdot,x_1)-G(\cdot,x_2)\|_{L^2(0,T;H)} &\leq \mu([-h,0])\{(L_1+L_2)\|x_1-x_2\|_{L^2(0,T;V)} \\ &+L_2\|x_1-x_2\|_{L^2(-h,0;V)}\}.\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

引理 7.3.2. 令 u_1 和 u_2 为空间 $L^2(0,T;U)$ 中的两个变量。假设(H7.1)成立，则有

$$E\|w(t;p,u_1)-w(t;p,u_2)\|^2\leq 6MT\|Bu_1-Bu_2\|^2_{L^2(0,T;Z)}\cdot\widetilde{M_1}, \tag{7.3.3}$$

其中 $\widetilde{M_1}=exp\{6MT\mu([-h,0])(L_1+L_2)+6MT\cdot m\cdot L_3+2MT(\text{trace}Q)\cdot L_3\}$.

证明 令 $f(t,w(t))=\Phi(t,w(t))\cdot m$, $\Phi_i(t,w(t)):=\Phi(t,w(t))h_i, t>0, w\in Z$. 则有 (7.2.6) 等价于下式

$$\begin{aligned}w(t;p,u) &= S(t)p+\int_0^t S(t-s)\{G(s,w(s))+f(s,w(s)) \\ &+B(u(s)\}ds+\sum_{i\in N}\int_0^t S(t-s)\Phi_i(s,w(s))d\tilde{Z}_i(s).\end{aligned} \tag{7.3.4}$$

这样,可以得到下面的结论

$$
\begin{aligned}
&E\|w(t;p,u_1)-w(t;p,u_2)\|^2\\
&\le 2E\|\int_0^t S(t-s)\{[G(s,w(s;p,u_1))-G(s,w(s;p,u_2))]\\
&\quad+[f(s,w(s;p,u_1))-f(s,w(s;p,u_2))]+B(u_1-u_2)\}ds\|^2\\
&\quad+2E\|\sum_{i\in N}\int_0^t S(t-s)[\Phi_i(s,w(s;p,u_1))-\Phi_i(s,w(s;p,u_2))]d\tilde{Z}_i(s)\|^2\\
&\le 6\int_0^t\|S(t-s)\|^2ds\int_0^t E\|[G(s,w(s;p,u_1))-G(s,w(s;p,u_2))]\|^2ds\\
&\quad+6\cdot m^2\int_0^t\|S(t-s)\|^2\int_0^t E|||[\Phi(s,w(s;p,u_1))-\Phi(s,w(s;p,u_2))]|||^2ds\\
&\quad+2\int_0^t\|S(t-s)\|^2\cdot\sum_{i\in N}\lambda_i E\|[\Phi_i(s,w(s;p,u_1))-\Phi_i(s,w(s;p,u_2))]\|ds\\
&\quad+6\int_0^t\|S(t-s)\|^2\cdot E\|B(u_1-u_2)\|^2ds\\
&\le\{6MT\mu([-h,0])(L_1+L_2)+6MT\cdot m\cdot L_3\\
&\quad+2MT(\mathrm{trace}Q)\cdot L_3\}\cdot\int_0^t E\|w(s;p,u_1)-w(s;p,u_2)\|^2ds\\
&\quad+6MT\|B(u_1-u_2)\|^2_{L^2(0,T,Z)}
\end{aligned}
$$

应用 Gronwall 不等式可得，

$$
\begin{aligned}
E\|w(t;p,u_1)-w(t;p,u_2)\|^2&\le 6MT\|Bu_1-Bu_2\|^2_{L^2(0,T;Z)}\\
&\cdot exp\{6MT\mu([-h,0])(L_1+L_2)+6MT\cdot m\cdot L_3+2MT(\mathrm{trace}Q)\cdot L_3\}.
\end{aligned}
$$

接下来，我们将给出方程(7.2.5)在J上是渐近可控的定义：对任给的$\varepsilon>0$以及$\xi_T\in Z$，如果存在一个控制 $u\in L^2(0,T;U)$使得

$$
\begin{aligned}
E\|\xi_T-S(T)p-\int_0^T S(T-s)G(s,w(s))ds\\
-\int_0^T S(T-s)\Phi(s,w(s))dZ(s)-\int_0^T S(T-s)Buds\|^2<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

为了证明渐近可控性的结论，给出如下假设：

假设(H7.3) 对任意的$q_1,q_2\in L^2(0,T;Z)$，存在一个$u\in L^2(0,T;U)$使得

$$
\begin{aligned}
&E\{\int_0^t S(t-s)q_1ds-\int_0^t S(t-s)q_2dZ(s)\}=\int_0^t S(t-s)Buds,\\
&\|Bu\|^2_{L^2(0,t;Z)}\le N(E\|\int_0^t S(t-s)q_1ds\|^2+E\|\int_0^t S(t-s)q_1dZ(s)\|^2),
\end{aligned}
$$

其中N为一个独立于q_1和q_2的常数。

定理 7.3.3. 假设满足假设(H7.1)-(H7.3)，系统(7.2.5)在J上是渐近可控的。

证明　从定义可以看出我们要证明定理也就是证明对给定的$\varepsilon>0$和$\xi_T\in D(A)$，可以找到存在一个$u\in L^2(0,T;U)$使得

$$E\|\xi_T - w(T;p,u)\|^2 < \varepsilon.$$

下面来证明，因为$\xi_T \in D(A)$，那么存在一个$q_1 \in L^2(0,T;Z)$使得

$$\int_0^T S(T-s)q_1(s)ds = \xi_T - S(T)p,$$

(例如：$q_1(s) = (\xi_T - sA\xi_T) - S(s)p/T$)。令$u_1 \in L^2(0,T;U)$为任意给定的。由假设(H7.3), 存在一个$u_2 \in L^2(0,T;U)$使得

$$\begin{aligned} &E\int_0^T S(T-s)\{q_1 - G(\cdot,w(\cdot,p,u_1))ds\} - E\int_0^T S(T-s)\Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_1))dZ(s) \\ &\quad = \int_0^T S(T-s)Bu_2 ds, \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

因此，

$$\begin{aligned} &\xi_T - S(T)p - E\int_0^T S(T-s)G(\cdot,w(\cdot,p,u_1))ds \\ &\quad - E\int_0^T S(T-s)\Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_1))dZ(s) - \int_0^T S(T-s)Bu_2 ds = 0 \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

同时也可以选择 $v_2 \in L^2(0,T;U)$ 使得

$$\begin{aligned} &E\int_0^T S(T-s)[G(\cdot,w(\cdot,p,u_1)) - G(\cdot,w(\cdot,p,u_2))]ds \\ &\quad - E\int_0^T S(T-s)[\Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_1)) - \Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_2))]dZ(s) = \int_0^T S(T-s)Bv_2 ds, \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

和

$$\begin{aligned} \|Bv_2\|^2_{L^2(0,T;Z)} &\le N\{E\int_0^T \|S(T-s)[G(\cdot,w(\cdot,p,u_1)) - G(\cdot,w(\cdot,p,u_2))]\|^2 ds \\ &\quad + E\|\int_0^T S(T-s)[\Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_1)) - \Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_2))]dZ(s)\|^2\} \\ &\le NMT\cdot E\int_0^T \|G(\cdot,w(\cdot,p,u_1)) - G(\cdot,w(\cdot,p,u_2))]\|^2 ds \\ &\quad + NMT\cdot m\cdot E\int_0^T |||\Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_1)) - \Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_2))|||^2 ds \\ &\quad + NMT(\mathrm{trace}Q)\cdot E\int_0^T |||\Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_1)) - \Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_2))|||^2 ds \\ &\le \{NMT(L_1+L_2)\mu[-h,0] + NMT\cdot m\cdot L_3 \\ &\quad + NMT(\mathrm{trace}Q)\cdot L_3\}\cdot E\int_0^T \|w(\cdot,p,u_1)) - w(\cdot,p,u_2)\|^2 ds. \end{aligned}$$

令 $\widetilde{M}_2 := NMT(L_1+L_2)\mu[-h,0] + NMT\cdot m\cdot L_3 + NMT(\mathrm{trace}Q\cdot L_3)$。

则由引理 7.3.2 可得

$$\|Bv_2\|^2_{L^2(0,T;Z)} \le \widetilde{M}_1 \cdot \widetilde{M}_2 \cdot (\frac{t}{2})^2 \|Bu_1 - Bu_2\|^2_{L^2(0,T;Z)}.$$

取 $u_3 = u_2 - v_2$，选定 v_3 满足

$$\begin{aligned} &E\int_0^t S(t-s)[G(s,w(s,p,u_3)) - G(s,w(s,p,u_2))]ds \\ &\quad -E\int_0^t S(t-s)[\Phi(s,w(s,p,u_3)) - \Phi(s,w(s,p,u_2))]dZ(s) \\ &\quad = \int_0^t S(t-s)Bv_3 ds, \qquad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

重复前面的工作，可以得到一个序列 $\{u_n\}_{n\ge1}$ 使得 $u_{n+1} = u_n - v_n$，同时由

$$\begin{aligned} \|B(u_n - u_{n+1})\|^2_{L^2(0,T;Z)} &\le \|Bv_n\|^2_{L^2(0,T;Z)} \\ &\le (6MT\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2)^{n-1} \cdot \frac{t^{2n-2}}{2\times4\times\cdots\times(2n-2)} \|B(u_2 - u_1)\|^2_{L^2(0,T;Z)}, \end{aligned}$$

可以得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|B(u_n - u_{n+1})\|_{L^2(0,T;Z)} &\le \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{6MT\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2 \cdot t^2}{2}]^n \times \frac{1}{n!} \|B(u_2 - u_1)\|^2_{L^2(0,T;Z)} \\ &\le \infty. \end{aligned}$$

综上可以得到 $u^* \in L^2(0,T;Z)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} Bu_n = u^* \text{in} L^2(0,T;Z).$$

因此对 $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$，存在一个整数 N 使得

$$\|B(u_N - u_{N+1})\|^2_{L^2(0,T;Z)} \le \frac{\varepsilon}{2M}$$

所以有

$$\|\int_0^t S(t-s)B(u_N - u_{N+1})ds\|^2 \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样就可以得到

$$
\begin{aligned}
&E\|\xi_T-S(T)p-\int_0^T S(T-s)G(\cdot,w(\cdot,p,u_N))ds \\
&\quad -\int_0^T S(T-s)\Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_N))dZ(s)-\int_0^T S(T-s)Bu_N ds\|^2 \\
&\quad \le 2E\|\xi_T-S(T)p-\int_0^T S(T-s)G(\cdot,w(\cdot,p,u_N))ds \\
&\qquad -\int_0^T S(T-s)\Phi(\cdot,w(\cdot,p,u_N))dZ(s)-\int_0^T S(T-s)Bu_{N+1}ds\|^2 \\
&\qquad +2\|\int_0^T S(T-s)B(u_N-u_{N+1})ds\|^2 \\
&\quad \le \varepsilon
\end{aligned}
$$

从而定理得证。

7.4 举例

这一节中，考虑下面的时滞微分方程

$$
\begin{aligned}
&dy(t)=[A_0y(t)+\int_{-h}^0 a(s)A_0y(t-s)ds+g(y(t))+Bu(t)]dt+\Phi(y(t))dZ(t) \\
&\qquad\qquad 0\le x\le\pi, t\in J=[0,T], \\
&y(t,0)=y(t,\pi)=0 \qquad t\ge 0, \\
&y(t,x)=\varphi(t,x) t\in J_0, \qquad 0\le x\le\pi
\end{aligned}
\tag{7.4.1}
$$

其中 $A_0=\frac{d^2}{dx^2}$ 有 $D(A_0)=\{y\in H^2(0,\pi): y(0)=y(\pi)=0\}$ 和

$|g(y_1)-g(y_2)|\le L_1\|y_1-y_2\|$　　对任意给定的常数 $L_1>0$.

利用 Da Prato and Zabczyk [21]中常用的方法，可以将系统(7.4.1)写成方程(7.2.5)形式，其中的 $H=L^2([0,\pi])$，$Z(t)$ 表示 Hilbert 空间 H 中的 Lévy 过程。令 $A:H\to H$ 由下式定义

$$
A\xi=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi+\int_{-h}^0 a(s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi(t+s)ds,
$$

定义域为 $D(A)\subset D(A_0)$。则，A 生成一个对称的 H 中的 C_0-半群 e^{-tA}，这样就存在一个常数 $M>0$ 使得 A_0 的特征值和特征函数分别为 $\lambda_n=-n^2$ 和 $\varphi_n(x)=\sin nx$。令

$$
U=\{u: u=\sum_{n=2}^{\infty}u_n\varphi_n: \sum_{n=2}^{\infty}u_n^2<\infty \qquad 范数为 \|u\|=(\sum_{n=2}^{\infty}u_n^2)^{1/2}\}
$$

$$Bu = 2u_2\varphi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n\varphi_n \qquad \text{for} \qquad u = \sum_{n=2}^{\infty} u_n \in U.$$

显然，算子 B 是 Jeong、Kwun 和 Park 在文[43]中给出了很好的定义的。从而可知 B 满足假设(H7.3)。令 $(h_i)_{i\in N}$ 为一个 H 中的正交基来源于特征算子 Q，同时令 $(\lambda_i)_{i\in N}$ 为对应的特征值。令 $\Phi_i(y) := \Phi(y)h_i$ 和 $\Phi_i(y)$ 对每一个 $i \in N$ 为连续的,同时使得存在常数 $L_3 > 0$ 有

$$\sum_{i\in N} \| \Phi_i(y_1) - \Phi_i(y_2) \|^2 \le L_3^2 \| y_1 - y_2 \|^2$$

因此，在上面的假设条件下，函数 g 和 Φ 满足假设(H7.1)和 (H7.2)。 也就是说方程(7.4.1)满足上面定理 7.3.3 所要求的条件 ，因此方程(7.4.1)是渐近可控的。近可控性。

参考文献

[1]P. Muthukumar and P. Balasubramaniam. Approximate controllability for semi-linear retarded stochastic systems in Hilbert spaces. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 26(2):131, 2009.

[2] 龚光鲁. *随机微分方程引论*.北京:北京大学出版社, 1995.

[3] X. Mao. Robustness of stability of stochastic differential delay equations with Markovian switching. *Stability and Control: Theory and Applications*, 3(1):48–61, 2000.

[4] X. Mao. Attraction, stability and boundedness for stochastic differential delay equations. *Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications*, 47(7):4795–4806, 2001.

[5] X. Mao and L. Shaikhet. Delay-dependent stability criteria for stochastic differential delay equations with Markovian switching. *Stability and Control: Theory and Applications*, 3(2):88–102, 2000.

[6] X. Mao and C. Yuan. Stochastic differential equations with Markovian switching. Imperial College Pr, 2006.

[7] A. Friedman 著， 吴让泉译. *随机微分方程及其应用*. 北京: 科学出版社, 1983.

[8] B. Oksendal. *Stochastic differential equations*. Springer Berlin, 1998.

[9] 泽夫. 司曲斯. *随机微分方程理论及其应用*. 上海:上海科学技术文献出版杜, 1986.

[10] 胡宣达. *随机微分方程稳定性理论*. 南京:南京大学出版社, 1986.

[11] 罗琦. *无限时滞随机泛函微分方程的基本理论*. PhD thesis, 广州: 华南理工大学, 2004.

[12] 王志东. *非 Lipschitz 系数的随机 Volterra 型积分方程和多值随机发展方程*. PhD thesis, 武汉：华中科技大学, 2008.

[13] 魏凤英. *随机反应扩散系统的稳定、镇定与控制*. PhD thesis, 长春:东北师范大学, 2006.

[14] D. Nualart. The Malliavin calculus and related topics. Springer, 1995.

[15] H. Kunita. Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge Univ Pr, 1997.

[16] Y. Bakhtin and J. C. Mattingly. Stationary solutions of stochastic differential equation with memory and stochastic partial differential equations. *Arxiv preprint math/0509166*, 2005.

[17] J. Oh. The density for jump processes in canonical stochastic differential equation. *Kanmgweon-Kyungki Math. Jour*, 8:1–17, 2000.

[18] Y. Bakhtin and J. C. Mattingly. Malliavin calculus for infinite-dimensional systems with additive noise. *Journal of Functional Analysis*, 249(2):307–353, 2007.

[19] S. Mohammed and T. Zhang. Anticipating stochastic differential systems with memory. *Stochastic Processes and their Applications*, 119(9):2773–2802, 2009.

[20] E. Pardoux. Stochastic partial differential equations. *Fudan lecture notes*, 2007.

[21] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge Univ Pr, 1992.

[22] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Ergodicity for infinite dimensional systems*. Cambridge Univ Pr, 1996.

[23] K. Liu. Stability of infinite dimensional stochastic differential equations with applications. CRC Press, 2006.

[24] N. V. Krylov. Spdes in lq ((0, tau], lp) spaces. *Electronic Journal of Probability*, 5(13):1–29, 2000.

[25] N. V. Krylov. An analytic approach to spdes. *Stochastic partial differential equations: six perspectives*, page 185–242, 1999.

[26] K. H. Kim. Lq (lp) theory and hölder estimates for parabolic spdes. *Stochastic processes and their applications*, 114(2):313–330, 2004.

[27] N.V. Krylov and B.L. Rozovskii. Stochastic evolution equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 16(4):1233–1277, 1981.

[28] R. Mikulevicius and B. Rozovskii. A note on krylov's l p-theory for systems of spdes. *Electron. J. Probab*, 6:1–35, 2001.

[29] X. Zhang. Stochastic heat equations with random initial conditions. *Chin. Ann. Math.* , 26B(4):599–610, 2005.

[30] X. Zhang. Regularities for semilinear stochastic partial differential equations. *Journal of Functional Analysis*, 249(2):454–476, 2007.

[31] M. Sanz-Sole. A Course on Malliavin Calculus with Applications to Stochastic Partial Differential Equations. *Lecture Notes*, 2, 2004.

[32] G. Da Prato and A. Debussche. Absolute continuity of the invariant measures for some stochastic PDEs. *Journal of Statistical Physics*, 115(1):451–468, 2004.

[33] R.M. Balan and D. Kim. The stochastic heat equation driven by a Gaussian noise: The Markov Property. *Preprint*, 2006.

[34] H. Kunita. Generalized solutions of a stochastic partial differential equation. *Journal of Theoretical Probability*, 7(2):279–308, 1994.

[35] Z. Brzezniak and D. Gatarek. Martingale solutions and invariant measures for stochastic evolution equations in banach spaces, stoch. *Processes Appl*, 84:187–225, 1999.

[36] S.E.A. Mohammed. Stochastic functional differential equations. Research Notes in Mathematics, no. 99, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-LondonMelbourne, 1984.

[37] S.E.A. Mohammed. Stochastic differential systems with memory. Theory, examples and applications. In *Stochastic Analysis and Related Topics VI: Proceedings of the Sixth Oslo-Silivri Workshop, Geilo, 1996*, page 1. Birkhauser, 1998.

[38] T. Caraballo. Asymptotic exponential stability of stochastic partial differential equations with delay. *Stochastics and stochastics reports(Print)*, 33(1-2):27–47, 1990.

[39] T. Caraballo. Nonlinear partial functional differential equations: existence and stability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 262(1):87–111, 2001.

[40] T.Á. Caraballo, K. Liu, and A. Truman. Stochastic functional partial differential equations: existence, uniqueness and asymptotic decay property. *Proceedings:*

Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 456(1999):1775–1802, 2000.

[41] M. Benchra S. Baghli and K. Ezzinbi. Controllability Results for Semilinear Functional an Neutral Functional Evolution Equations with Infinite Delay. *Surveys in Mathematics and its Applications*, (4):15–39, 2009.

[42] K. Balachandran and J.P. Dauer. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 115(1):7–28, 2002.

[43] J.M. Jeong, Y.C. Kwun, and J.Y. Park. Approximate controllability for semilinear retarded functional differential equations. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 5(3):329–346, 1999.

[44] P. Balasubramaniam and J.P. Dauer. Controllability of semilinear stochastic delay evolution equations in Hilbert spaces. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 31(3):157–166, 2002.

[45] J. Klamka. Stochastic controllability of linear systems with delay in control. *TECHNICAL SCIENCES*, 55(1), 2007.

[46] J. Klamka. Stochastic controllability of systems with variable delay in control. *TECHNICAL SCIENCES*, 56(3), 2008.

[47] C. Yuan and X. Mao. Robust stability and controllability of stochastic differential delay equations with Markovian switching. *Automatica*, 40(3):343–354, 2004.

[48] V. Bally and E. Pardoux. Malliavin calculus for white noise driven parabolic spdes. *Potential analysis*, 9(1):27–64, 1998.

[49] K. Bichteler, J.B. Gravereaux, and J. Jacod. *Malliavin calculus for processes with jumps*. Gordon and Breach, 1987.

[50] J.M. Bismut. Calcul des variations stochastique et processus de sauts. *Probability Theory and Related Fields*, 63(2):147–235, 1983.

[51] J.L. Solé, F. Utzet, and J. Vives. Canonical Lévy process and Malliavin calculus. *Stochastic processes and their applications*, 117(2):165–187, 2007.

[52] D. Nualart and M. Zakai. Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus. *Probability theory and related fields*, 73(2):255–280, 1986.

[53] J.A. León, J.L. Solé, F. Utzet, and J. Vives. On Lévy processes, Malliavin calculus and market models with jumps. *Finance and Stochastics*, 6(2):197–225, 2002.

[54] R. Leandre. Malliavin Calculus of Bismut type for Poisson processes without probability. *JESA Special issue on fractional systems. J. Sabatier and al eds.*

[55] R.F. Bass and M. Cranston. The Malliavin calculus for pure jump processes and applications to local time. *The Annals of Probability*, pages 490–532, 1986.

[56] G. Di Nunno, T. Meyer-Brandis, B. Øksendal, and F. Proske. Malliavin calculus and anticipative Itô formulae for Lévy processes. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top*, 8(2):235–258, 2005.

[57] G. Di Nunno, B. Oksendal, and F. Proske. *Malliavin calculus for Lévy processes with Applications to Finance*. Springer Verlag, 2008.

[58] S. Albeverio, V. Mandrekar, and B. Rüdiger. Existence of mild solutions for stochastic differential equations and semilinear equations with non-Gaussian Lévy

noise. *Stochastic Processes and Their Applications*, 119(3):835–863, 2009.

[59] S. Albeverio, J. L. Wu, and T. S. Zhang. Parabolic spdes driven by poisson white noise. *Stochastic processes and their applications*, 74(1):21–36, 1998.

[60] C. Knoche. SPDEs in infinite dimension with Poisson noise. *Comptes rendus-Mathématique*, 339(9):647–652, 2004.

[61] C. Knoche. Mild Solutions of SPDE's Driven by Poisson Noise in Infinite Dimensions and their Dependence on Initial Conditions. *Preprint*.

[62] R.F. Bass et al. Stochastic differential equations with jumps. *Probability Surveys*, 1:1–19, 2004.

[63] B. ?ksendal and F. Proske. Stochastic partial differential equations driven by Lévy space-time white noise. *Annals of Applied Probability*, pages 1506–1528, 2004.

[64] C. Pellegrini. Existence, uniqueness and approximation of stochastic Schrodinger equation: the diffusive case. *Ann. Probab*, 36(6):2332–2353, 2008.

[65] J. Picard. On the existence of smooth densities for jump processes. *Probability Theory and Related Fields*, 105(4):481–511, 1996.

[66] J. Picard and C. Savona. Smoothness of harmonic functions for processes with jumps. *Stochastic Processes and their Applications*, 87(1):69–92, 2000.

[67] N. Fournier. Jumping SDEs: absolute continuity using monotonicity. *Stochastic processes and their applications*, 98(2):317–330, 2002.

[68] N. Fournier. Smoothness of the law of some one-dimensional jumping SDEs with non-constant rate of jump. *Electronic Journal of Probability*, 13:135–156, 2008.

[69] A. Takeuchi. The Malliavin calculus for SDE with jumps and the partially hypoelliptic problem. *Osaka J. Math*, 39(3):523–559, 2002.

[70] D. Applebaum and J.L. Wu. Stochastic partial differential equations driven by Lévy space-time white noise. *Random Operators and Stochastic Equations*, 8(3):245–260, 2000.

[71] M. Hairer, J. C. Mattingly, and E. Pardoux. Malliavin calculus for highly degenerate 2d stochastic navier-stokes equations. *Comptes Rendus Mathematique*, 339(11):793–796, 2004.

[72] A.M. Kulik. Some remarks on time-stretching differentiation for general Lévy processes. *Theory Stoch. Process*, 7(23):3–4, 2001.

[73] T. Cass. Smooth densities for solutions to stochastic differential equations with jumps. *Stochastic Processes and their Applications*, 119(5):1416–1435, 2009.

[74] M. Röckner and T. Zhang. Stochastic evolution equations of jump type: existence, uniqueness and large deviation principles. *Potential Analysis*, 26(3):255–279, 2007.

[75] AA Gushchin and U. Küchler. On stationary solutions of delay differential equations driven by a Lévy process. *Stochastic processes and their applications*, 88(2):195–211, 2000.

[76] R. Situ. Theory of stochastic differential equations with jumps and applications: mathematical and analytical techniques with applications to engineering. Springer Verlag, 2005.

[77] S. Peszat and J. Zabczyk. Stochastic partial differential equations with Lévy noise: an evolution equation approach. Cambridge Univ Pr, 2007.

[78] M. Reiß, M. Riedle, and O. van Gaans. Delay differential equations driven by Lévy processes: stationarity and Feller properties. *Stochastic processes and their applications*, 116(10):1409–1432, 2006.
[79] J. Lei and M.C. Mackey. Stochastic differential delay equation, moment stability, and application to hematopoietic stem cell regulation system. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 67(2):387–407, 2007.
[80] J. Luo. Comparison principle and stability of Ito stochastic differential delay equations with Poisson jump and Markovian switching. *Nonlinear Analysis*, 64(2):253–262, 2006.
[81] J. Luo. Fixed points and stability of neutral stochastic delay differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334(1):431–440, 2007.
[82] A. Takeuchi. ABSOLUTE CONTINUITY FOR SOLUTIONS TO STOCHASTIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH JUMPS. *Stochastics and Dynamics*, 7(2):153–185, 2007.
[83] Z. Brzeźniak. On stochastic convolution in Banach spaces and applications. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 61(3):245–295, 1997.
[84] E. Hausenblas. Existence, uniqueness and regularity of parabolic SPDEs driven by Poisson random measure. *Electron. J. Probab*, 10:1496–1546, 2005.
[85] E. Hausenblas. Spdes driven by poisson random measure with non lipschitz coefficients: existence results. *Probability Theory and Related Fields*, 137(1):161–200, 2007.
[86] J.M. Jeong. Retarded functional differential equations with L 1-valued controller. *Funkcial. Ekvac*, 36:71–93, 1993.
[87] O. van Gaans. A series approach to stochastic differential equations with infinite dimensional noise. *Integral Equations and Operator Theory*, 51(3):435–458, 2005.
[88] P.E. Protter. Stochastic integration and differential equations. Springer Verlag, 2004.
[89] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge Univ Pr, 2004.
[90] 何声武，汪嘉冈，严加安，等. *半鞅与随机分析*. 北京:科学出版社, 1995.
[91] D. Applebaum. Levy processes in Euclidean spaces and groups. *Quantum Independent Increment Processes I*, pages 1–98.
[92] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer, 1983.
[93] M. Reiß. Stochastic Delay Differential Equations. Lecture notes for a course given at Humboldt University Berlin (2002/03).
[94] J. Bao, A. Truman, and C. Yuan. Stability in distribution of mild solutions to stochastic partial differential delay equations with jumps. *Proceedings of the Royal Society A*, 2009.
[95] V. Mandrekar and B. Rüdiger. Existence and uniqueness of path wise solutions for stochastic integral equations driven by non Gaussian noise on separable Banach

spaces. *preprint*, 61, 2004.

[96] J. Wu. Theory and applications of partial functional differential equations. Springer Verlag, 1996.

[97] T. Taniguchi, K. Liu, and A. Truman. Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mild solutions to stochastic functional differential equations in hilbert spaces. *Journal of Differential Equations*, 181(1):72–91, 2002.

[98] J.B. Walsh. An introduction to stochastic partial differential equations. *Lecture Notes in Math*, 1180(265):439, 1986.

[99] L. Mytnik. Stochastic partial differential equation driven by stable noise. *Probability Theory and Related Fields*, 123(2):157–201, 2002.

[100] Z. Brzezniak. Stochastic partial differential equations in m-type 2 banach spaces. *Potential Analysis*, 4(1):1–45, 1995.

[101] J. Luo and K. Liu. Stability of infinite dimensional stochastic evolution equations with memory and markovian jumps. *Stochastic Processes and their Applications*, 118(5):864–895, 2008.

[102] S.N. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov processes: Characterization and convergence*. Wiley New York, 1986.

[103] G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestrari. L super (2)-Regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in the highest-order derivatives. *J. MATH. ANAL. APPLIC.*, 102(1):38–57, 1984.

[104] S. Nakagiri. Structural properties of functional differential equations in Banach spaces. *Osaka J. Math*, 25(2):353–398, 1988.

[105] 罗琦， 邓飞其， 毛学荣，等. 随机反应扩散系统稳定性的理论与应用. *中国科学(E 辑:信息科学)*, (10), 2007.

[106] 冉启康. 一类椭圆型随机偏微分方程弱解的存在性.*数学物理学报*, (02), 2008.

[107] L. Wan and J. Duan. Exponential stability of non-autonomous stochastic partial differential equations with finite memory. *Statistics and Probability Letters*, 78(5):490–498, 2008.

[108] F. Wei and K. Wang. The existence and uniqueness of the solution for stochastic functional differential equations with infinite delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 331(1):516–531, 2007.

[109] J. Randjelovi and S. Jankovi. On the pth moment exponential stability criteria of neutral stochastic functional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1):266–280, 2007.

[110] R. Leandre. Positivity theorem for a stochastic delay equation on a manifold. *Acta Applicandae Mathematicae*, 78(1):273–284, 2003.

[111] S. E. A Mohammed and M. K. R Scheutzow. The stable manifold theorem for non-linear stochastic systems with memory. i. existence of the semiflow. *Journal of Functional Analysis*, 205(2):271–305, 2003.

[112] M. Riedle. Solutions of affine stochastic functional differential equations in the state space. *Journal of Evolution Equations*, 8(1):71–97, 2008.

[113] B. Xie. The stochastic parabolic partial differential equation with non-Lipschitz coefficients on the unbounded domain. *Journal of Mathematical*

Analysis and Applications, 339(1):705–718, 2008.

[114] Y. Xu and S. Hu. The existence and uniqueness of the solution for neutral stochastic functional differential equations with infinite delay in abstract space. *Acta Applicandae Mathematicae: An International Survey Journal on Applying Mathematics and Mathematical Applications*, 2009. 10.1007/s10440-009-9465-x.

[115] K. Bahlali, M. Eddahbi, and E. Essaky. Quasi-linear parabolic spdes with continuous coefficients. *Afri. Dias. J. Math*, 1(1):85–95, 2004.

[116] R. C. Dalang and M. Sanz-Sole. Regularity of the sample paths of a class of second-order spde's. *Journal of Functional Analysis*, 227(2):304–337, 2005.

[117] L. Denis and L. Stoica. A general analytical result for non-linear spde's and applications. *Electronic J. of Probability*, 9:674–709, 2004.

[118] M. G. Reznikoff and E. Vanden-Eijnden. Invariant measures of stochastic partial differential equations and conditioned diffusions. *Comptes rendus-Mathématique*, 340(4):305–308, 2005.

[119] O. van Gaans. Invariant measures for stochastic evolution equations with Hilbert space valued Lévy noise. *Preprint, Leiden University.*

[120] W. Q. Zhu. Nonlinear stochastic dynamics and control in hamiltonian formulation. *Applied Mechanics Reviews*, 59:230, 2006.

[121] J. Jacod. The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations: limit theorems. *The Annals of Probability*, 32(3):1830–1872, 2004.

[122] F.E. Benth and A. LØkka. Anticipative calculus for Lévy processes and stochastic differential equations*. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 76(3):191–211, 2004.

[123] E. Platen. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations. *Acta Numerica*, 8:197–246, 2008.

[124] S. Albeverio and M. Röckner. Stochastic differential equations in infinite dimensions: solutions via Dirichlet forms. *Probability Theory and Related Fields*, 89(3):347–386, 1991.

[125] G. Di Nunno, B. Øksendal, and F. Proske. White noise analysis for Lévy processes. *Journal of Functional Analysis*, 206(1):109–148, 2004.

[126] P. Carr and L. Wu. Time-changed Lévy processes and option pricing. *Journal of Financial Economics*, 71(1):113–141, 2004.

[127] E. Wong and M. Zakai. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36(5):1560–1564, 1965.

[128] S. Raible. Lévy processes in finance: Theory, numerics, and empirical facts. *University of Freiburg, Doctoral Thesis*, 2000.

[129] T. Fujiwara and H. Kunita. Stochastic differential equations of jump type and Lévy processes in diffeomorphisms group. *J. Math. Kyoto Univ*, 25(1):71–106, 1985.

[130] D. Nualart and J. Vives. Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. *Séminaire de Probabilités*, 24:89, 1988.

[131] D. Nualart and E. Pardoux. Stochastic calculus with anticipating integrands. *Probability Theory and Related Fields*, 78(4):535–581, 1988.

[132] E. Carlen and É. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. *Stochastics, algebra and analysis in classical and quantum dynamics*,

pages 63–73, 1990.

[133] II. Gikhman. Stochastic partial differential equations. Qualitative methods of investigating nonlinear differential equations and nonlinear oscillations. (A 83-25262 09-70) Kiev, Institut Matematiki AN USSR, 1981,, pages 25–59, 1981.

[134] A. TRUMAN and J.L. Wu. Stochastic Burgers equation with Levy space-time white noise. In *Probabilistic methods in fluids: proceedings of the Swansea 2002 Workshop: Wales, UK, 14-19 April 2002*, page 298. World Scientific Pub Co Inc, 2003.

[135] D. Ocone and É. Pardoux. Linear stochastic differential equations with boundary conditions. *Probability Theory and Related Fields*, 82(4):489–526, 1989.

[136] X. Mao, C. Yuan, and J. Zou. Stochastic differential delay equations of population dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 304(1):296–320, 2005.

[137] X. Mao. Exponential stability for stochastic differential delay equations in Hilbert spaces. *Quart. J. Math*, 42(2):77–85, 1991.

[138] I. Elsanosi, B. Øksendal, and A. Sulem. Some solvable stochastic control problems with delay. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 71(1):69–89, 2000.

[139] C. Yuan, J. Zou, and X. Mao. Stability in distribution of stochastic differential delay equations with Markovian switching. *Systems & control letters*, 50(3):195–207, 2003.

[140] J.P. Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *automatica*, 39(10):1667–1694, 2003.

[141] T. Caraballo, J.A. Langa, and J.C. Robinson. Attractors for differential equations with variable delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 260(2):421–438, 2001.

[142] K. Liu. Some remarks on exponential stability of stochastic differential equations. *Stochastic analysis and applications*, 19(1):59–65, 2001.

[143] H. Kunita. Malliavin calculus of canonical stochastic differential equations with jumps. *preprint*, pages 01–039, 2001.

[144] D. Applebaum. Probability measures on compact groups which have square-integrable densities. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 40(6):1038, 2008.

[145] N. Bouleau and L. Denis. Energy image density property and the lent particle method for Poisson measures. *Journal of Functional Analysis*, 257(4):1144–1174, 2009.

[146] M. Wu, N. Huang, and C.W. Zhao. Fixed points and stability in neutral stochastic differential equations with variable delays. *Fixed Point Theory and Applications*, 2008.

[147] J.R. Norris. Integration by parts for jump processes. Séminaire de Proba., XXII (J. Azéma, PA Meyer and M. Yor, eds.), Lecture Notes in Math, 1321:271–315.

[148] N. Fournier. Malliavin calculus for parabolic SPDEs with jumps. *Stochastic Processes and their Applications*, 87(1):115–147, 2000.

[149] I. Nourdin and T. Simon. On the absolute continuity of Levy processes with

drift. *Annals of Probability*, 34(3):1035–1051, 2006.

[150] 彭实戈. 倒向随机微分方程及其应用. *数学进展*, 26(002):97–112, 1997.

[151] 周少甫，黄志远. 倒向随机微分方程的理论, 发展及其应用. *应用数学*, 15(002):9–13, 2002.

[152] 林清泉. 一类倒向随机微分方程比较定理. *华中科技大学学报: 自然科学版*, 29(A01):1–3, 2001.

[153] 沈轶， 廖晓昕. 随机中立型泛函微分方程指数稳定的 Razumikhin 型定理. *科学通报*, 43(021):2272–2275, 1998.

[154] 曹志刚， 严加安. 倒向随机微分方程解的比较定理 (英文). *数学进展*, 1999.

[155] 胡迪鹤. 随机环境中无穷维的控制的 Markov 分支链. *中国科学: A 辑*, 35(011):1288–1313, 2005.

[156] 王凤雨， 王洁明. 带奇异系数的有限维与无穷维随机微分方程. *应用概率统计*, 25(002):126–134, 2009.

[157] 罗交晚. 带跳的无穷维随机偏微分方程的逐次逼近. *广州大学学报: 自然科学版*, 5(005):1–4, 2006.

[158] 任永. 非李普希茨条件下无穷维随机微分方程的适度解. *数学研究*, 38(003):231–237, 2005.

[159] 胡荣. *中立型随机泛函微分方程解的渐近性质*. PhD thesis, 武汉：华中科技大学, 2009.

[160] S.E.A. Mohammed and M.K.R. Scheutzow. Lyapunov exponents of linear stochastic functional differential equations. Part II. Examples and case studies. *The Annals of Probability*, 25(3):1210–1240, 1997.

[161] S. Baghli and M. Benchohra. Perturbed functional and neutral functional evolution equations with infinite delay in Fréchet spaces. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2008(69):1–19, 2008.

[162] R. Sakthivel, J.H. Kim, and N.I. Mahmudov. On controllability of nonlinear stochastic systems. *Reports on Mathematical Physics*, 58(3):433–443, 2006.

[163] L. Wang. Approximate controllability of delayed semilinear control systems. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2005(1):67–76, 2005.

[164] L.C.G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales: Ito calculus*. Cambridge Univ Pr, 2000.

[165] 黄志远， 严加安. *无穷维随机分析引论*. ?本?科学出版社, 1997.

[166] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Springer Verlag, 2002.

[167] H. Pham. *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications*. Springer Verlag, Series: Stochastic Modelling and Applied Probability, 2009.

[168] J. Yong and X.Y. Zhou. Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. Springer Verlag, 1999.

[169] P. Kotelenez. Stochastic ordinary and stochastic partial differential equations: transition from microscopic to macroscopic equations. Springer, 2007.

[170] H. Holden, B. Oksendal, J. Uboe, and T. Zhang. Stochastic partial differential equations: a modeling, white noise functional approach. Springer, 1996.

[171] P. Malliavin and A. Thalmaier. *Stochastic calculus of variations in*

mathematical finance. Springer Verlag, 2006.

[172] S.E. Shreve. Stochastic Calculus for Finance: Continuous-Time Models. Birkhäuser, 2004.

[173] 黄志远. *随机分析学基础*. 北京:科学出版社, 2001.

[174] 钱敏平， 龚光鲁. *随机过程论*. 北京：北京大学出版社, 1997.

[175] E.B. Dynkin. *Markov processes*. Academic press, 1965.

[176] O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, and S.I. Resnick. *Lévy processes: theory and applications*. Birkhauser, 2001.

[177] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1991.

[178] Z. Dong and TG Xu. One-dimensional stochastic Burgers equation driven by Lévy processes. *Journal of Functional Analysis*, 243(2):631–678, 2007.

[179] Y. Liu and H. Zhao. Pathwise stationary solutions of stochastic Burgers equations with $L^2[0,1]$-noise and stochastic Burgers integral equations on infinite horizon. *Arxiv preprint math/0609344*, 2006.

[180] Z. Dong and Y.C. Xie. Global solutions of stochastic 2D Navier-Stokes equations with Lévy noise. *Science in China Series A: Mathematics*, 52(7):1497–1524, 2009.

[181] Z. Dong and Y. Xie. Ergodicity of linear SPDE driven by Lévy noise. *Journal of Systems Science and Complexity*, 23(1):137–152, 2010.

致 谢

在中南的博士生生活即将划上一个句号，几年的求学生涯在师长、亲友的大力支持下，走得辛苦却也收获满囊。

在论文即将付梓之际，思绪万千，心情久久不能平静。

首先，我要把我的敬意和赞美献给我的导师--刘再明教授，感恩之情难以用语言量度，谨以最朴实的话语致以最崇高的敬意。

本文是在刘老师的督促、指导和热情鼓励下完成的。授人以鱼不如授人以渔，从博士入学开始到到即将毕业，从论文选题到定稿，刘老师花了很多的时间、精力，给予了亲切的指导，置身其间，耳濡目染，潜移默化，使我接受了全新的思想观念，领会了基本的思考方式；刘老师学识渊博、治学严谨，尤其是他对待学问一丝不苟、精益求精的态度深深地震撼了我，让我逐步认识到：在学术道路上没有捷径，必须脚踏实地，认真钻研，才能有所收获；刘老师谦虚的为人和对问题敏锐的洞察力，是我学习的榜样，也必将使我终生受益。

其次，感谢中南大学数学学院诸位老师的关心，谢谢你们在学习过程中提供的指导；感谢讨论班上的同学，很幸运有机会和诸位师兄弟们在同班学习和研讨，特别要感谢师兄廖基定副教授、肖晴初副教授和杨刚、袁少谋给我各方面的帮助；

同时还要感谢师弟张伟、周国立、江五元、师妹彭君等提供文献。我很庆幸这些年遇到了这么多的良师益友，一路走来，从你们的身上我收获无数，却无以回报，谨此一并表达我的谢意。

最后，尤其要感谢我的妻子、湖南科技大学王艳女士给我的学习上的鼓励、督促和生活上的照顾。

攻读博士学位期间的主要研究成果

1. X.F. Yin, Z.M. Liu. Controllability of semilinear stochastic systems driven by Levy process in Hilbert space. 2010 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation,(ICICTA),May ， 11-12 ， 2010 ； Changsha ， China.ISBN-13:9780769540771, 1043-1045(EI 检索:20103413182897).

2. X.F. Yin, Z.M. Liu. Existence Result of Solution for Jumping Stochastic Differential Equations with Delay. Proceedings of The Third International Conference on Modeling and Simulation,
ISBN:9781846261558,346-350(EI、ISTP 检索 ISI:000282085200076).

3.尹湘锋，刘再明.带混合边界条件的单相自由边界问题的 Legendre-Tau 方法.湖南科技大学学报(自然科学版),2009,24(2).

4. 尹湘锋,肖晴初.Poisson 随机测度驱动下的随机时滞微分方程解的存在性与唯一性.《应用数学学报》2010,33,4,671-680.

5. 尹湘锋，刘再明.一类 L\'evy 过程驱动的随机微分方程在可分 Banach 空间的解的存在性与唯一性(已投高校应用数学学报).

6. X.F. Yin, Z.M. Liu and Q.C. Xiao. Existence and Uniqueness of Mild solutions to Stochastic Partial Differential Equations with Delay Driven by Poisson Random Measure(拟投稿).

7. X.F. Yin, Z.M. Liu and Q.C. Xiao.Approximate controllability for semi linear retarded stochastic systems with Hilbert space valued(拟投稿).

Lévy-型随机微分方程与随机泛函微分方程解的研究

作者：　　　　　　尹湘锋
学位授予单位：　　中南大学